**UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO**
**INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS**
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**

**Curso de Matemática - Bacharelado**

Primeira Lista de Exercícios de Introdução aos Espaços Métricos - MTM251
Prof. Júlio César do Espírito Santo

1 de Outubro de 2016

(1) Considere em $M = \mathbb{R}^n$ as métricas

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \sqrt{(x_1+y_1)^2+(x_2+y_2)^2+...+(x_n+y_n)^2} = \left[\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}} \\ d'(x,y) &= |x_1+y_1|+|x_2+y_2|+...+|x_n+y_n| = \sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i| \\ d''(x,y) &= \max|x_1+y_1|,|x_2+y_2|,...,|x_n+y_n| = \max_{1\leq i\leq n}|x_i-y_i|, \end{aligned}$$

em que $x=(x_1,x_2,...,x_n)$, $y=(y_1,y_2,...y_n)\in\mathbb{R}^n$. Mostre que

$$d''(x,y)\leq d(x,y)\leq d'(x,y)\leq n\cdot d''(x,y).$$

(2) (a) Mostre que $d(f,g)=\sup_{x\in X}|f(x)-g(x)|$ é uma métrica no conjunto $\mathcal{B}(X;\mathbb{R})=\{f:X\to\mathbb{R}/f$ é limitada$\}$.

(3) Seja $M$ um espaço métrico com métrica $d$. Mostre que

$$d_1(x,y)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$$

também é uma métrica em $M$. Observe que $M$ é limitado na métrica $d_1$.

(4) Seja $M$ um conjunto não-vazio e $d: M\times M\to\mathbb{R}^+$ satisfazendo, para $x,y,z\in M$:

1) $x=y\Rightarrow d(x,y)=0$;

2) $d(x,y)=d(y,x)$;

3) $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$.

Uma função $d$ com estas propriedades define uma *pseudometrica* em $M$. Seja $d$ uma pseudométrica em $M$, seja uma relação em $M$, definida por $x$ $y$ se e somente se $d(x,y)=0$. Mostre que esta relação é de equivalencia e que o correspondente conjunto quociente pode ser feito, de maneira natural, um espaço métrico.

(5) Todo espaço métrico finito é discreto.

(6) Dê exemplos de conjuntos não vazios disjuntos cujas distâncias entre eles seja nula.

(7) (a) Estabeleça isometrias entre $\mathcal{B}(X,M\times N)$ e $\mathcal{B}(X,M)\times\mathcal{B}(X,N)$. (b) Estabeleça isometrias entre $\mathcal{B}(X\times Y,M)$ e $\mathcal{B}(X,\mathcal{B}(Y,M))$. No item (a), escolha a métrica conveniente em cada produto cartesiano.

(8) (Funções Contínuas). (a) Sejam, $M$ e $N$ espaços métricos e $f$ uma aplicação de $M$ para $N$. (a) Prove que se $f$ é uma aplicação constante, então $f$ é contínua. (b) Seja $M$ um espaço métrico com métrica $d$ e $a$ um ponto fixado em $M$. Mostre que a função real $f_a$ definida por $f_a(x)=d(x,a)$ é contínua.

(9) Escreva a definição de uma função Localmente Lipschitz. Mostre que toda aplicação Localmente Lipschitz é contínua.

(10) Descanse. Bom Estudo!