UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

1a. Lista de Matemática Aplicada à Engenharia de Controle e Automação - MTM146
Prof. Júlio César do Espírito Santo

12 de março de 2018

(1) Prove.
(a) $(\sqrt{2}-j)-j(1-\sqrt{2}j)=-2j$, (b) $\dfrac{1+2j}{3-4j}+\dfrac{2-j}{5j}=-\dfrac{2}{5}$, (c) $(1-j)^4=-4$.

(2) Mostre que cada um dos dois números complexos $z=1\pm j$ satisfaz a equação $z^2-2z+2=0$.

(3) Calcule. (a) $\left(\dfrac{1}{2-3j}\right)\left(\dfrac{1}{1+j}\right)$ (b) $j^{14}$ (c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{14} j^k$.

(4) Resolva a equação $s^2+s+1=0$ no conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos.

(5) Encontre a parte real e a parte imaginária dos números complexos $z$ abaixo e escreva-os sob a forma $Re(z)+Im(z)j$.

(a) $z=j+1$ (b) $z=\frac{1}{j+1}$ (c) $z=\frac{1}{j}+\frac{1}{2-j}$ (d) $z=j^4-j^5$

(e) $z=\frac{2}{4+j}-\frac{3}{2-j}$ (f) $z=\frac{1}{j}+j$ (g) $z=3j(4-2j)$ (h) $z=\frac{1}{j^3-3j}$

(6) O *conjugado complexo* de um número complexo $z=x+yj$ é o número complexo $\overline{z}=x-yj$. O *módulo* ou valor absoluto de um número complexo $z=x+jy$ é o número real $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$. Calcule o módulo e escreva o conjugado dos números complexos dos itens abaixo. Qual o módulo do conjugado de um número complexo?

(a) $-11-8j$ (b) $5+3j$ (c) $-j$ (d) $-17$

(e) $\cos\omega t+j\operatorname{sen}\omega t$ (f) $\cos\omega t-j\operatorname{sen}\omega t$ (g) $-0.333j+1$ (h) $\dfrac{1+j}{2}$.

(7) Prove que no Corpo dos Números Complexos $\mathbb{C}$, os números 0 é o único elemento neutro aditivo e o 1 é o único elementos neutro multiplicativo.

(8) Use o Princípio da Indução Matemática para provar que
(a) $\overline{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} z_k}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\overline{z_k}$ (b) $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} z_k\right|\leq\displaystyle\sum_{k=1}^{n}|z_k|$

(c) $1+z+z^2+z^3+\cdots+z^{n-1}+z^n=\dfrac{1-z^{n+1}}{1-z}$.

(9) Use o Princípio da Indução Matemática para provar a fórmula do Binômio de Newton

$$(1+z)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z^k,$$

onde $n$ é um inteiro positivo e $\dbinom{n}{k}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, ou seja

$$(1+z)^n=1+\frac{n}{1!}z+\frac{n(n-1)}{2!}z^2+\cdots+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}z^k+\cdots+z^n.$$