UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Curso de Matemática - Bacharelado

Primeira Lista de Exercícios de Análise III - MTM228
Prof. Júlio César do Espírito Santo

11 de Abril de 2016

(1) Descreva o elemento neutro de cada espaço vetorial a seguir e diga qual a dimensão dos mesmos.

(a) $V = \{0\}$;
(b) $\mathbb{R}^n$, com $n \in \mathbb{N}$;
(c) $\mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, com $m, n \in \mathbb{N}$;;
(d) $\mathbb{C} = \left\{a + bi \,/\, a, b \in \mathbb{R}\,,\, i^2 = -1\right\}$; (Os conhecidos *Complexos*)
(e) $\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk / i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1\,; a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ (Os conhecidos *Quatérnions*)
(f) $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n / \, m, n \in \mathbb{N}$ e f é linear $\}$;
(g) $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^p) = \{g : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p / \, m, n, p \in \mathbb{N}$ e g é bilinear $\}$;
(g) $S := \{y \in C^2(\mathbb{R}) \,/\, y'' + y' = 0\}$;
(h) $\mathcal{H} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n /$ Fixados $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, com algum deles não-nulo e $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 0\}$; (Chamado *Hiperplano* de $\mathbb{R}^n$)

(2) Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$ não-nulos. Se todo z que seja ortogonal a x, também for ortogonal a y, prove que x e y são múltiplos um do outro.

(3) Se $||x|| = ||y||$, prove que $\dfrac{x+y}{2}$ é ortogonal a $y - x$. *(A mediana de um triangulo isósceles é também altura.)*

(4) Sejam $u, v \in \mathbb{R}^n$. O *segmento de reta* de extremidades u, v é, por definição, o conjunto

$$[u, v] = \{(1-t)u + tv\,,\, t \in [0, 1]\}\,.$$

Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ chama-se *convexo* quando $[u, v] \in X$ para todo $u, v \in X$.

(a) Prove que o conjunto $B[x; r] = \{x \in \mathbb{R}^n / ||x|| \leq r\}$, (*Bola fechada de centro em* x *e raio* $r > 0$) é um conjunto convexo em $\mathbb{R}^n$. *(Divirta-se fazendo $x = 0$, $r = 1$ e desenhando tal conjunto considerando em $\mathbb{R}^2$, respectivamente, as normas do maximo $||\cdot||_\infty$, Euclidiana $||\cdot||_2$ e da soma $||\cdot||_1$).*
(b) Mostre que se $a \in \mathbb{R}^n$ e E é um subespaço vetorial convexo de $\mathbb{R}^n$, a *Variedade Afim* $a + E = \{a + x / x \in E\}$ é um conjunto convexo.
(c) Mostre que a intersecção entre conjuntos convexos é convexo.
(d) Mostre que o produto cartesiano entre conjuntos convexos é convexo.
(e) Verifique que fixados os números reais a, b e c, o conjunto $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \, ax + by \leq c\right\}$ é convexo em $\mathbb{R}^2$. Desenhe-o, para $a = b = c = 1$;
(f) De um exemplo de um conjunto não convexo em $\mathbb{R}^n, n > 3$.

(5) Mostre que a norma da soma e do máximo não provém de um produto interno.

(6) Prove que para $x, y \in \mathbb{R}^n$, então $| < x, y > | \leq ||x|| \cdot ||y||$, valendo a igualdade se, e somente se, um dos vetores é múltiplo do outro.

(7) Se a norma provém de um produto interno, prove que se $u, v \in \mathbb{R}^n$ são tais que $||u+v|| = ||u|| + ||v||$, então existe $\alpha > 0$ tal que $u = \alpha v$.

(8) Se a norma provém de um produto interno e $x, y \in \mathbb{R}^n$, tais que $||x|| = ||y|| = r$. Prove que se $t \in (0,1)$, então $||ty + (1-t)x|| < r$. Conclua que a esfera $S(0,r)$ não contém segmentos de reta.

(9) Prove que um funcional linear $f \in (\mathbb{R}^m)^*$ ou é identicamente nulo ou é sobrejetivo.

(10) Seja $E = L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^p)$. Mostre que E é um espaço vetorial de dimensão de $(m+n)p$.

(11) Considere $E = L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$. Estabeleça um isomorfismo entre E e o espaço vetorial das matrizes $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Defina uma função bilinear simétrica e mostre que tal isomorfismo leva funções bilineares simétricas em matrizes simétricas. Mostre que a matriz correspondente a função bilinear φ é invertível se, e somente se, φ é não-degenerada (isto é se $\varphi(x,y) = 0$, para todo $y \in \mathbb{R}^n$ implicar em $x = 0$).

Bom Descanso!