

UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

20a. Lista de Matemática Aplicada à Engenharia de Controle e Automação - MTM146

Prof. Júlio César do Espírito Santo

19 de novembro de 2018

(1) Use resíduos para provar que as integrais abaixo convergem para os valores indicados. Considere $a > 0$.

$$(a) \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} = \frac{\pi}{2}$$

$$(b) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

$$(c) \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} = \frac{\pi}{6}$$

$$(d) \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} = \frac{\pi}{4}$$

$$(e) \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 9)(x^2 + 4)^2} = \frac{\pi}{200}$$

$$(f) \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^6 + 1} = \frac{\pi}{6}$$

$$(g) \int_0^{\infty} \frac{\cos(ax) dx}{x^2 + 1} = \frac{\pi}{2} e^{-a}$$

$$(h) \int_0^{\infty} \frac{x \operatorname{sen}(ax) dx}{x^4 + 4} = \frac{\pi}{2} e^{-a} \operatorname{sen}(a)$$

(2) Determine o valor principal de Cauchy de cada uma das seguintes integrais convergentes.

$$(a) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$$

$$(b) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xdx}{(x^2 + 1)(x^2 + 2x + 2)}$$

$$(c) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 1)}$$

$$(d) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} x dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)}$$

$$(e) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x dx}{x^2 + 4x + 5}$$

$$(f) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x dx}{(x + a)^2 + b^2}; \text{ com } b > 0$$

$\pi; -\pi/5; \pi/2; .24352; -(\pi/e) \operatorname{sen} 2$

(3) Use resíduos para estabelecer as seguintes fórmulas de integração.

Considere para os itens (b) e (d) que $-1 < a < 1$; no item (e), que $b > 1$ e no item (f) que $n \in \mathbb{N}$.

$$(a) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 + 4 \operatorname{sen} \theta} = \frac{2\pi}{3}$$

$$(b) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a \cos \theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - a^2}};$$

$$(c) \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2(3\theta)d\theta}{5 - 4 \cos(2\theta)} = \frac{3\pi}{8}$$

$$(d) \int_0^{\pi} \frac{\cos(2\theta)d\theta}{1 - 2a \cos \theta + a^2} = \frac{\pi a^2}{1 - a^2};$$

$$(e) \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{(b + \cos \theta)^2} = \frac{\pi a}{(b^2 - 1)^{3/2}};$$

$$(f) \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^{2n}(\theta) d\theta = \frac{(2n)! \pi}{2^{2n} (n!)}.$$

(4) Prove que a integral converge para o valor indicado.

$$(a) \int_0^{\infty} \frac{2x^2 - 1}{x^4 + 5x^2 + 4} dx = \frac{\pi}{4}$$

$$(b) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{\pi}{e}$$

$$(c) \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^2 + e^2} dx = \frac{\pi}{2e}$$

$$(d) \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{(x^2 + 1)^2} dx = -\frac{\pi}{4}$$

(5) (a) Após uma pesquisa, use resíduos para provar que

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

(b) Faça o mesmo para

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3 + 1} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$