UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

20a. Lista de Matemática Aplicada à Engenharia de Controle e Automação - MTM146
Prof. Júlio César do Espírito Santo

01 de julho de 2019

(1) Seja f uma função racional na forma

$$f(z) = \frac{N(z)}{D(z)},$$

onde o grau de N é estritamente menor que D. Utilizando resíduos, podemos escrever a função f sob a forma de frações parciais com a fórmula a seguir:

$$f(z) = \sum_{s_k} \text{Res}\left[\frac{f(s)}{z-s}, s_k\right],$$

onde s_k é um pólo de $f(s)$.

Sabemos que se f tem um pólo de ordem m em s_0, então:

$$\text{Res}\left[\frac{f(s)}{z-s}, s_0\right] = \lim_{s \to s_0} \frac{(s-s_0)f(s)}{z-s},$$

se $m = 1$ **ou**

$$\text{Res}\left[\frac{f(s)}{z-s}, s_0\right] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{s \to s_0} \frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}} \left[(s-s_0)^m \frac{f(s)}{z-s}\right],$$

se $m > 1$. Nota[1]

Utilize as fórmulas anteriores para obter a expansão em frações parciais das funções abaixo.

(a) $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}$

R.$a.$ $\frac{1}{2(z-1)} + \frac{1}{2(z+1)} - \frac{1}{z}$; b. $\frac{1}{4(z+1)} + \frac{1}{2(z-1)^2} - \frac{1}{4(z-1)}$

(2) Sabendo que

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt,$$

e que

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \sum_{z_k} \text{Res}\left[F(s)e^{st}, z_k\right],$$

onde z_k são todos os pólos de $F(s)$, use resíduos e a expressão acima para calcular

(a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s+a}\right\}$ (b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s+a)^2}\right\}$ (c) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s+a)^2(s+b)}\right\}$

(d) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2}{s^3}\right\}$ (e) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s+1)(s-2)^2}\right\}$ (f) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s+b-a}{(s-a)^2+b^2}\right\}$

Neste exercício, considere a e b constantes reais.

[1] Se $m \geq 3$, será preciso calcular derivadas **até** a ordem $m-1$.

(3) Seja $x[k]$, com $k \in \mathbb{N}$ uma sequencia, isto é, $x[k] = x_k,\ k \in \mathbb{N}$. Sabendo que

$$\mathcal{Z}\{x[k]\} = X(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} x[k] z^{-k},$$

e que

$$\mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} = \sum_{z_i} \operatorname{Res}\left[X(z) z^{k-1}, z_i\right],$$

onde z_i são todos os pólos de $X(z)$, use resíduos e a expressão acima para calcular

(a) $\mathcal{Z}^{-1}\left\{\dfrac{z}{(z+1)(z+2)}\right\}$ (b) $\mathcal{Z}^{-1}\left\{\dfrac{ez}{(ez-1)^2}\right\}$ (c) $\mathcal{Z}^{-1}\left\{\dfrac{z}{z-1}\right\}$

R.$x[k] = (-1)^k - (-2)^k$; b.$x[k] = ke^{-k}$; c.$x[k] = 1^k$

(4) Obter a série de Fourier das funções periódicas abaixo. Faça gráficos.

(a) $f(x) = \begin{cases} -k, & \text{se } x \in [-L, 0] \\ k, & \text{se } x \in [0, L]; \end{cases}$ e $f(x + 2L) = f(x)$ com $L, k > 0$.

(b) $f(t) = t^2,$ se $t \in [-\pi, \pi]$ e $f(t + 2\pi) = f(t)$.

Obs. Nas letras b,g e h, troque x por t na integral e na série.

(c) *(Dente de serra)* $f(x) = x,$ se $x \in [-\pi, \pi]$ e f é 2π-periódica.

(d) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } -L < x < L/2 \\ k, & \text{se } -L/2 \leq x \leq L/2; \\ 0, & \text{se } L/2 < x < L. \end{cases}$ e $f(x + 2L) = f(x)$ com $L, k > 0$.

(e) $f(x) = 2 \operatorname{sen} x$

(f) $f(x) = |x|$ com $x \in [-L, L]$ e f uma função $2L$-periódica.

(g) $V_o(t) = \begin{cases} E \operatorname{sen}(\omega t), & \text{se } t \in [0, \pi/\omega] \\ 0, & \text{se } t \in [\pi/\omega, 2\pi/\omega]; \end{cases}$ e $V_o(t + 2\pi/\omega) = V_o(t)$ com $\omega, E > 0$.

(h) $f(t) = t^2,$ se $t \in [0, 2\pi]$ e $f(t + 2\pi) = f(t)$.

Curiosidade. Acesse teropa.info/harmonics-explorer/ (Sound On)

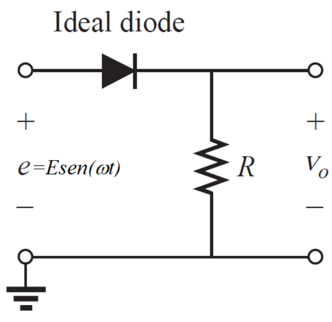

FIGURA 1. Questão 1 - (g)

(5) Determine quais componentes da serie de Fourier estão presentes nas funções abaixo representadas. As opções para estas componentes são: 1.**termo constante** a_0 **(e diga qual seu sinal)**, 2.**cossenos**, 3.**senos**, 4.há **apenas harmônicos ímpares**; 5.há **apenas harmônicos pares**. Escreva os números ao lado dos desenhos. Para uma dica, use a seguinte guia na nota de rodapé.[2]

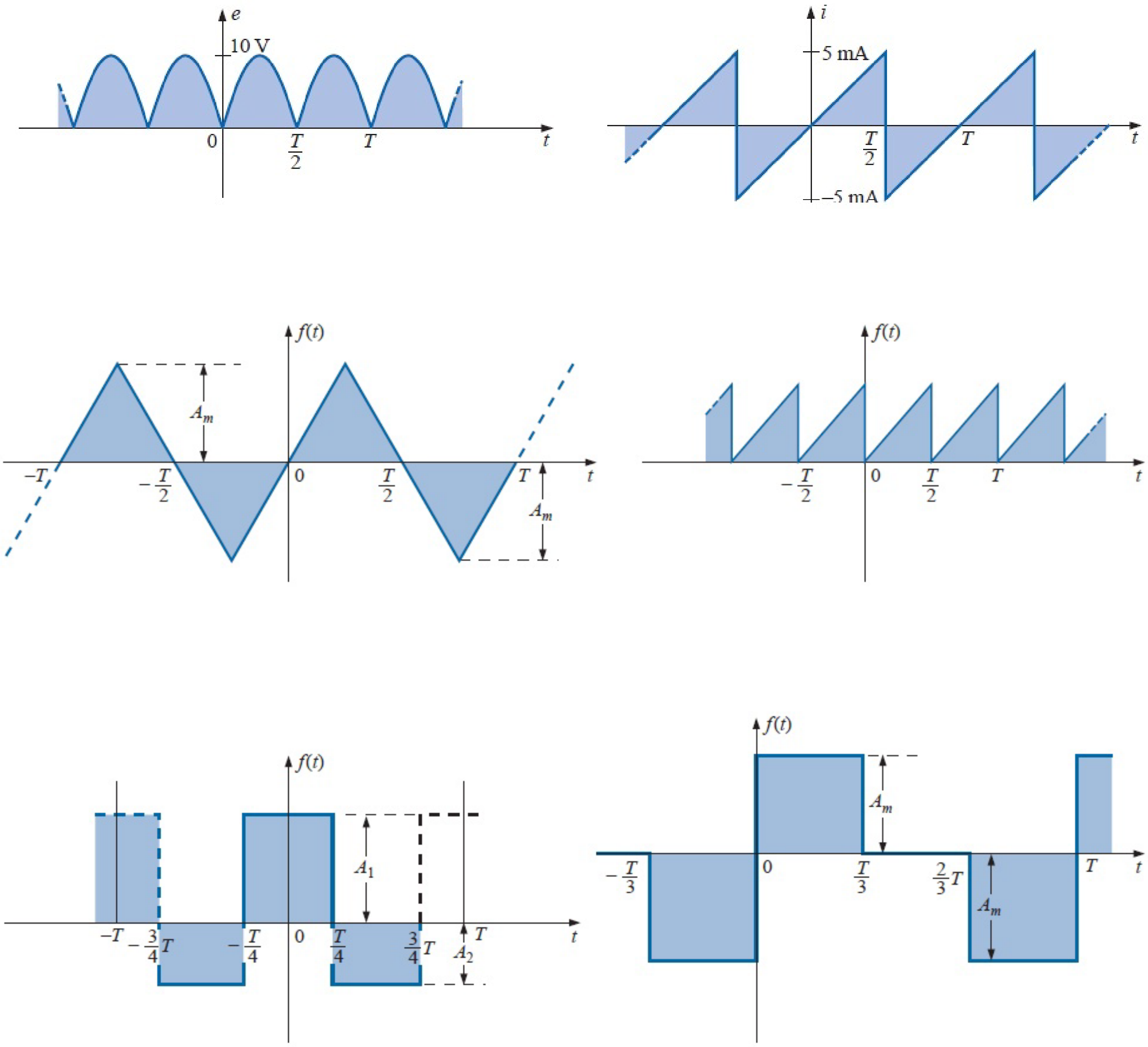

FIGURA 2. Questão 5

[2]**Dicas:**

1.**Termo constante** $a_0/2$ **(e seu sinal)**: Veja a área representada por $La_0 = \int_{-L}^{L} f(x)dx$. Analise graficamente em $[-L, L]$ para ter a resposta.

2.**cossenos**: Se a função for ímpar em $[-L, L]$; (simétrica com relação à origem: $f(-x) = -f(x)$ em $[-L, L]$): não haverá cossenos e $a_0 = 0$.

3.**senos**: Se a função for par em $[-L, L]$; (simétrica com relação à reta $x = 0$: $f(-x) = f(x)$ em $[-L, L]$): não haverá senos.

4.há **apenas harmônicos ímpares**: Se a função for ímpar em $[0, 2L]$; (simétrica com relação ao ponto $(x, y) = (L, 0)$: $f(x + L) = -f(x)$ em $[0, 2L]$): não haverá harmônicos pares das series de seno e cosseno.

5.há **apenas harmônicos pares**: Se a função for par em $[0, 2L]$; (simétrica com relação à reta $x = L$: $f(x + L) = f(x)$ em $[0, 2L]$): não haverá harmônicos pares das series de seno e cosseno.

(6) Defina[3] a Transformada de Fourier de uma função $f(x)$ por

$$\mathcal{F}\left\{f(x)\right\} = \hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-jwx}dx$$

Obter a Transformada de Fourier das funções abaixo. Faça os gráficos de f e $\hat{f}$.

$$(a) f(x) = \begin{cases} a, & \text{se } |x| < L, \\ 0, & \text{se } |x| \geq L, \end{cases} \quad \text{com } L, a > 0.$$

(b) $f(s) = e^{-a|x|}$, com $x \in \mathbb{R}$ e $a > 0$;

$$(c) f(x) = \begin{cases} L - |x|, & \text{se } |x| < L, \\ 0, & \text{se } |x| \geq L, \end{cases} \quad \text{com } L > 0.$$

(7) Use a Transformada de Laplace para obter a solução do Problema de Valor Inicial e Fronteira abaixo.[4] Aqui, $g(t)$ é uma função dada.

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & t, x > 0, \\ u(0,t) = g(t), & t > 0, \\ \lim\limits_{x \to +\infty} u(x,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0, & x > 0. \end{cases}$$

(8) Use a Transformada de Fourier[5] para obter a solução do Problema de Valor Inicial e Fronteira abaixo.

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R} \text{ e } t > 0, \\ u(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = 0, & x \in \mathbb{R}, \\ \lim\limits_{|x| \to +\infty} u(x,t) = 0, & t > 0, \\ \lim\limits_{|x| \to +\infty} u_x(x,t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

(9) Use a Transformada de Laplace para obter a solução do Problema de Valor Inicial e Fronteira abaixo, onde $c > 0$ e $k_0 > 0$ são constantes.[6]

$$\begin{cases} u_t - c^2 u_{xx} = 0, & x, t > 0, \\ u(x,0) = k_0, & x > 0, \\ u(0,t) = 0, & t > 0, \\ \lim\limits_{x \to +\infty} u(x,t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

Importante: Use que $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-a\sqrt{s}}}{s}\right\} = 1 - \operatorname{erf}\left(\dfrac{a}{2\sqrt{t}}\right)$, onde $\operatorname{erf}(t)$ é a *função erro*, dada por

$$\operatorname{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-\tau^2} d\tau.$$

Acabou!

[3]para $f(x)$ seccionalmente contínua com $|f(x)|$ integrável em $\mathbb{R}$.

[4](A equação $u_{tt} - u_{xx} = 0$ é conhecida como a Equação da Onda, e o problema modela a vibração de uma corda semi-infinita.)

[5]Use que:
(a) $\mathcal{F}\{u_x(x,t)\} = j\omega\hat{u}(\omega,t)$
(b) $\mathcal{F}\{u_{xx}(x,t)\} = -\omega^2\hat{u}(\omega,t)$
(c) $\mathcal{F}\{u_t(x,t)\} = \hat{u}_t(\omega,t)$
(d) $\mathcal{F}\{f(x-a)\} = e^{-ja\omega}\hat{f}(\omega)$ *(Teorema do deslocamento real)*
(e) $\cos(\omega t) = (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})/2$
A resposta deste exercício é $u(x,t) = (1/2)(f(x+t) + f(x-t))$

[6](A equação $u_t - c^2 u_{xx} = 0$ é conhecida como a Equação do Calor, e o problema modela a difusão de calor em uma barra semi-infinita.)