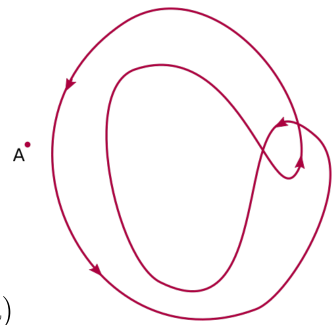
UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

21a. Lista de Matemática Aplicada à Engenharia de Controle e Automação - MTM146

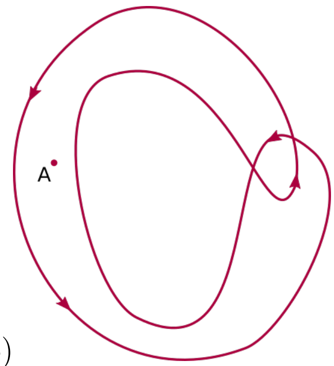
Prof. Júlio César do Espírito Santo

29 de junho de 2018

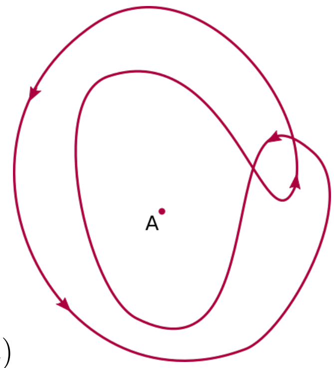
(1) Em cada caso, seja N o número de voltas que cada contorno abaixo dá em torno do ponto A. Determine N.



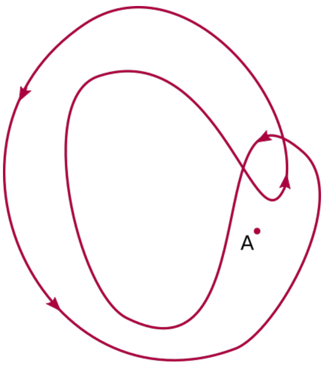
(a)



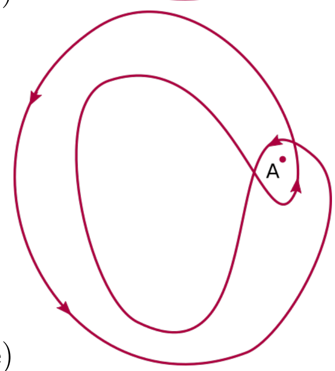
(b)



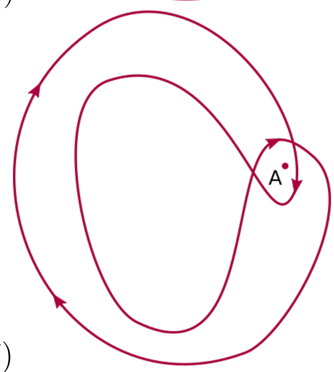
(c)



(d)

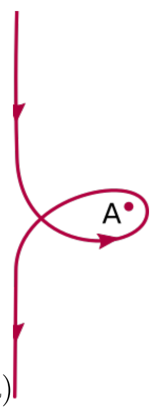


(e)

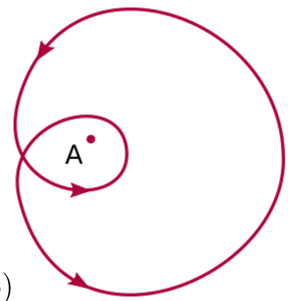


(f)

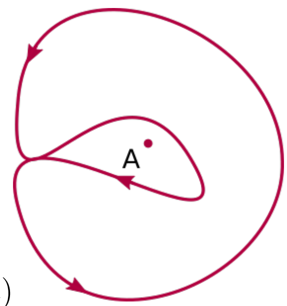
(2) Em cada caso, seja N o número de voltas que cada contorno abaixo dá em torno do ponto A. Determine N.



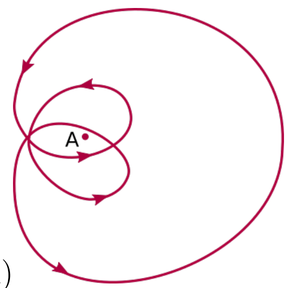
(a)



(b)

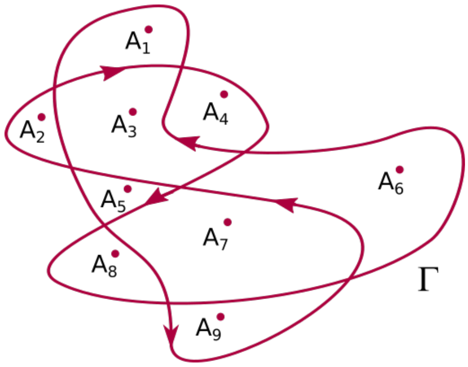


(c)



(d)

(3) Seja N o número de voltas que o contorno Γ abaixo dá em torno do ponto A_i, $i = 1, 2, \cdots, 9$. Para cada A_i, determine N.

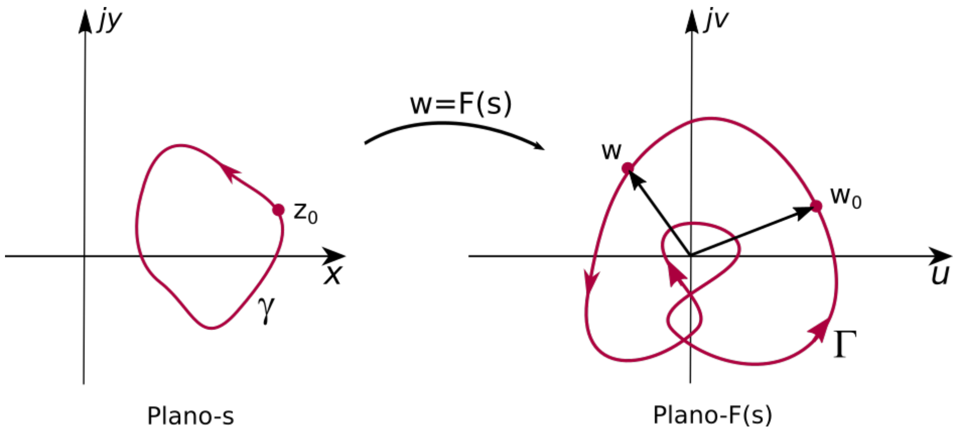


(4) Se o inteiro N representa a quantidade de voltas que o ponto $w = f(z)$ descreve em torno da origem enquanto z percorre γ uma vez no sentido positivo[1], determine N quando (a) γ é a curva $z = 2e^{j\theta}$ com $\theta \in [0, 2\pi]$ e $f(z) = z^2$. (b) γ é o quadrado de vértices $\pm 1 \pm j$ e $f(z) = 1/z$.

(5) Seja γ um contorno fechado simples descrito no sentido positivo e seja F uma função analítica sobre γ em em seu interior, exceto possivelmente para polos interiores a γ. Suponha também que F não tenha zeros sobre γ. Então, se N é como no exercício anterior,

$$N = Z - P$$

onde Z e P são os números de pólos e zeros de f no interior de γ.



Baseado no fato exposto acima, calcule a quantidades de zeros no interior de γ quando:

(a) a curva Γ dá uma volta em torno da origem, com a mesma orientação de γ, e $F(s)$ tem dois pólos simples no interior de γ.

(b) a curva Γ dá uma volta em torno da origem no sentido contrário ao de γ e $F(s)$ tem dois pólos simples no interior de γ.

(c) a curva Γ não engloba a origem e $F(s)$ tem um pólos duplo no interior de γ.

(d) situação da figura acima, em que $F(s)$ tem um pólos simples no interior de γ.

Bons estudos!

[1] Por exemplo, se $N = -1$, então $\Gamma = f(\gamma)$ envolve a origem e foi percorrida uma vez no sentido contrário ao percorrido por z em γ.