UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

21a. Lista de Matemática Aplicada à Engenharia de Controle e Automação - MTM146

Prof. Júlio César do Espírito Santo

04 de Dezembro de 2018

(1) Seja f uma função racional na forma

$$f(z) = \frac{N(z)}{D(z)}, \tag{0.1}$$

onde o grau de N é estritamente menor que D. Utilizando resíduos, podemos escrever a função f sob a forma de frações parciais com a fórmula a seguir:

$$f(z) = \sum_{z_k} \text{Res}\left[\frac{f(s)}{z-s}, z_k\right],$$

onde z_k é um pólo de $f(z)$.

Sabemos que se f tem um pólo de ordem m em z_0, então:

$$\text{Res}\left[\frac{f(s)}{z-s}, z_0\right] = \lim_{z\to z_0} \frac{(s-z_0)f(s)}{z-s},$$

se $m = 1$; **ou**

$$\text{Res}\left[\frac{f(s)}{z-s}, z_0\right] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}}\left[(s-z_0)^m \frac{f(s)}{z-s}\right],$$

se $m > 1$. Nota[1]

Utilize as fórmulas anteriores e a expressão (0.1) para obter a expansão em frações parciais das funções abaixo.

(a) $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)(z+1)}$

(b) $f(z) = \dfrac{1}{(z+1)(z-1)^2}$

R. a. $\frac{1}{2(z-1)} + \frac{1}{2(z+1)} - \frac{1}{z}$; b. $\frac{1}{4(z+1)} + \frac{1}{2(z-1)^2} - \frac{1}{4(z-1)}$

[1] Se $m \geq 3$, será preciso calcular as derivadas **até** a ordem $m-1$.

(2) Sabendo que

$$\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt,$$

e que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\} = \sum_{z_k} \text{Res}\left[F(s)e^{st}, z_k\right],$$

onde z_k são todos os pólos de $F(s)$, use resíduos e a expressão acima para calcular

(a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s+a}\right\}$ (b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s+a)^2}\right\}$ (c) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s+a)^2(s+b)}\right\}$

(d) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2}{s^3}\right\}$ (e) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s+1)(s-2)^2}\right\}$ (f) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s+b-a}{(s-a)^2+b^2}\right\}$

Neste exercício, considere constantes convenientes $a, b \in \mathbb{R}$.

(3) Seja $x[n]$, com $n \in \mathbb{N}$ uma sequencia, isto é, $x[n] = x_n, n \in \mathbb{N}$. Sabendo que

$$\mathcal{Z}\left\{x[n]\right\} = X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x[n]z^{-n},$$

e que

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{X(z)\right\} = \sum_{z_k} \text{Res}\left[X(z)z^{n-1}, z_k\right],$$

onde z_k são todos os pólos de $X(z)$, use resíduos e a expressão acima para calcular

(a) $\mathcal{Z}^{-1}\left\{\dfrac{z}{(z+1)(z+2)}\right\}$ (b) $\mathcal{Z}^{-1}\left\{\dfrac{ez}{(ez-1)^2}\right\}$ (c) $\mathcal{Z}^{-1}\left\{\dfrac{z}{z-1}\right\}$

R a.$x[n] = (-1)^n - (-2)^n$ b.$x[n] = ne^{-n}$ c.$x[n] = 1$

Bons estudos!