

UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

22a. Lista de Matemática Aplicada à Engenharia de Controle e Automação - MTM146

Prof. Júlio César do Espírito Santo

01 de julho de 2018

(1) Escreva a definição de Transformação conforme em um ponto.

(2) Determine o ângulo de rotação $\psi_0 = \arg[f'(z_0)]$ que é produzido pela transformação

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

(a) no ponto $z = 1$ e (b) no ponto $z = j$.

Resp. $\pi; 0$

(3) Verifique em que pontos as funções abaixo são aplicações conforme.

(a) $f(z) = \exp(z)$ (b) $f(z) = z^2$ (c) $f(z) = \frac{z^2 + 1}{\exp(z)}$

(d) $f(z) = z + \frac{1}{z}$ (e) $f(z) = \frac{1}{z}$ (f) $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$

(Joukowski Transformation)

(Inversion)

(Bilinear Moëbius Transformation)

Resp. a. \mathbb{C} ; b. $\mathbb{C} \setminus \{0\}$; c. $\mathbb{C} \setminus \{1\}$; d. $\mathbb{C} \setminus \{0, \pm 1\}$; e. $\mathbb{C} \setminus \{0\}$; f. $\mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$ desde que $ad - bc \neq 0$;

(4) Para a transformação do plano- s para o plano- $F(s)$ dada abaixo

$$F(s) = 1 + \frac{6}{(s+1)(s+2)}$$

encontre os pólos, os zeros e associe as imagens da primeira coluna à segunda. Justifique.

Resp. $-1, -2; -(3/2) \pm j\sqrt{23}/2$

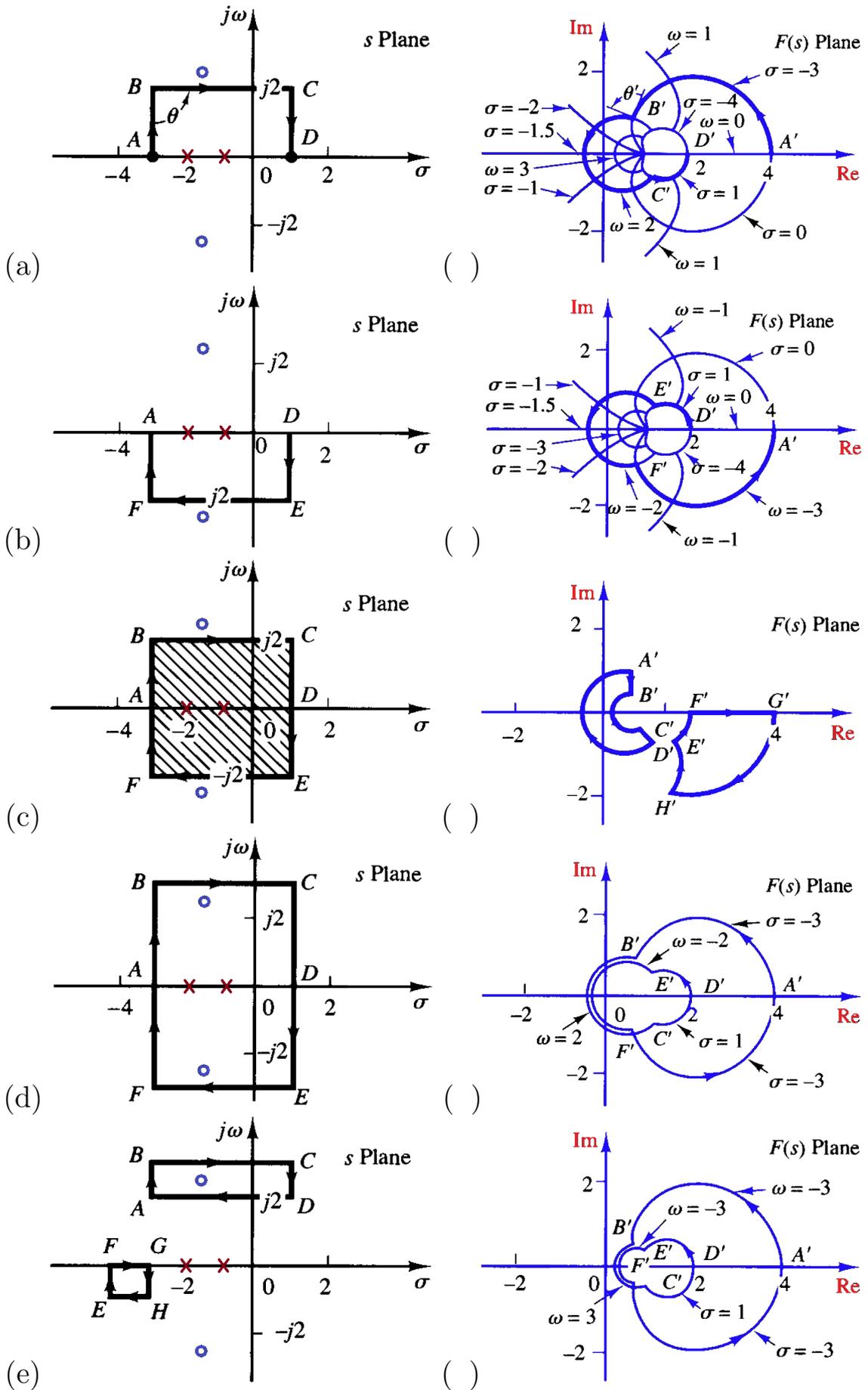
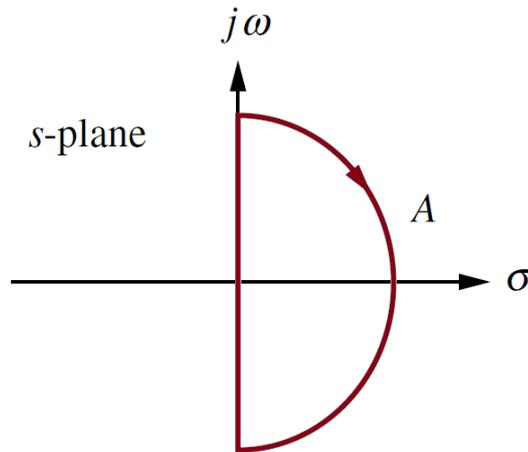


Figura para a Questão 4.

- (5) Um Engenheiro de Controle está interessado na quantidade de zeros (contando suas multiplicidades) da função

$$F(s) = 1 + G(s)H(s)$$

dentro do contorno semicircular no plano- s na figura abaixo.



Para isto, se F é analítica sobre e no interior da curva A e não tem zeros sobre a curva A , sabemos que basta contar a quantidade de voltas que a imagem da curva A pela função $F(s)$ dá em torno da **origem do plano- $F(s)$** .

Entretanto, ele não dispõe da imagem de $F(s) = 1 + G(s)H(s)$ no plano- F , embora disponha da imagem de $G(s)H(s)$ no plano- GH .

- (a) Explique¹ porque basta a ele contar a quantidade de voltas que a imagem da curva A pela função $G(s)H(s)$ dá em torno do ponto

$$-1 + j0$$

do plano- GH .

- (b) Se no desenho abaixo as bolinhas \circ representam² os zeros de $1 + G(s)H(s)$ e as cruzinhas \times representam³ os pólos de $1 + G(s)H(s)$, associe as imagens da coluna da esquerda com as da direita. (Sobrar uma imagem à direita sem associação. Marque a que sobrar com x.)

¹ Dica: Note que $G(s)H(s) = F(s) - 1$

² bolinhas \circ = zeros de $1 + G(s)H(s)$ = pólos de $\frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$ (Posição por ele desconhecida)

³ cruzinhas \times = pólos de $1 + G(s)H(s)$ = pólos de $G(s)H(s)$ (Posição por ele conhecida)

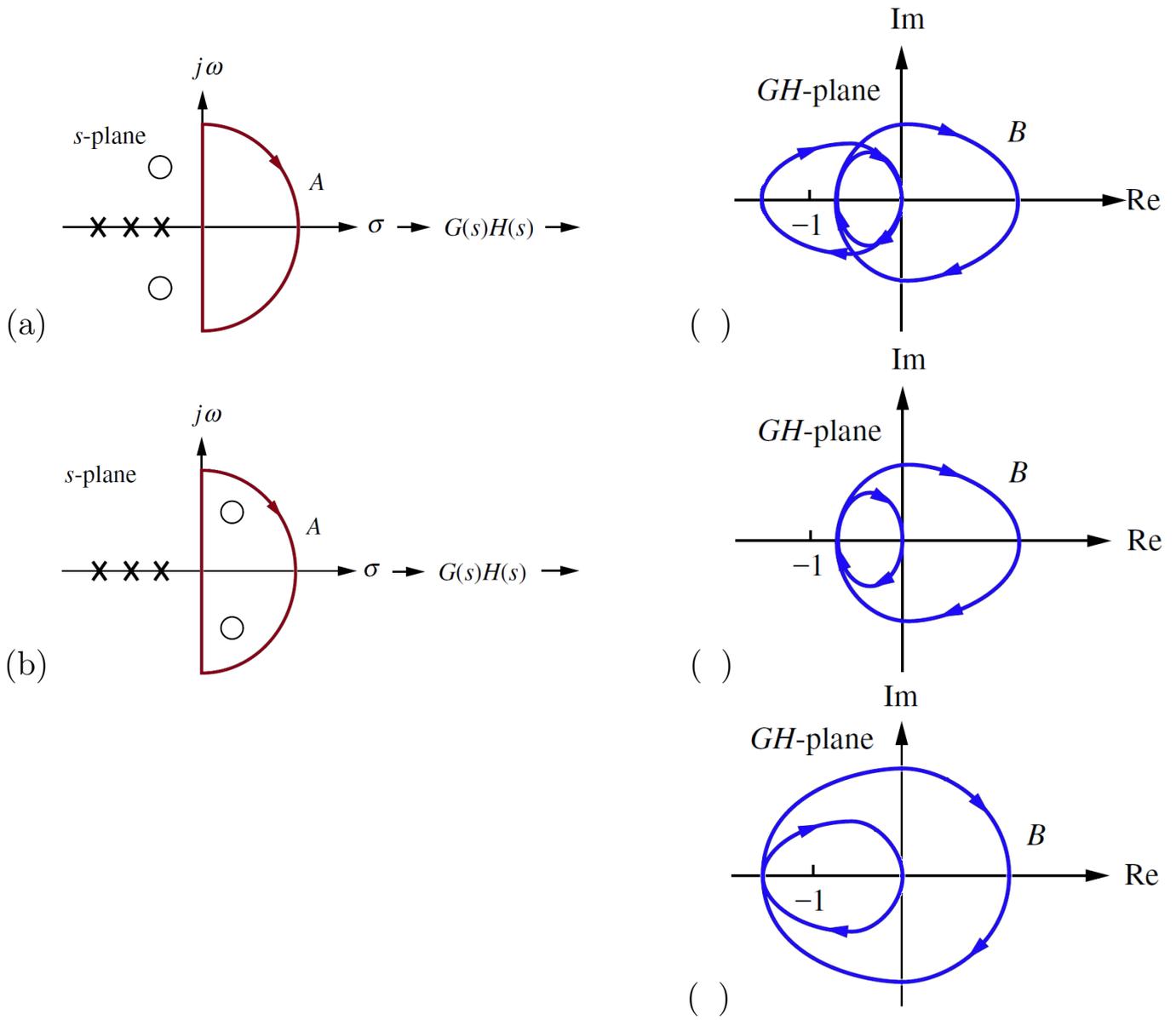


Figura para a Questão 5.