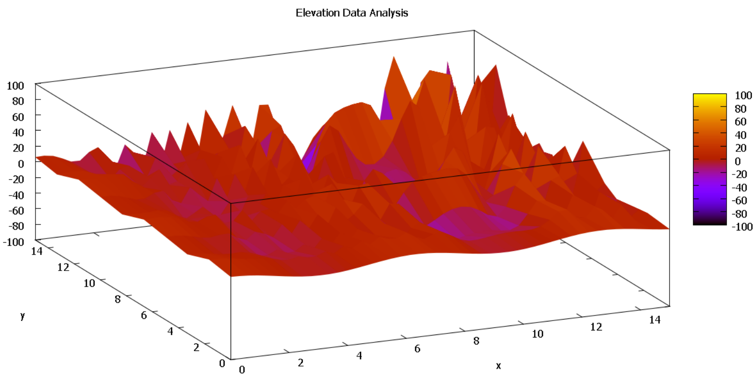
UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Segunda Lista de Exercícios de Cálculo Diferencial e Integral III - MTM124
Prof. Júlio César do Espírito Santo

04 de Maio de 2016

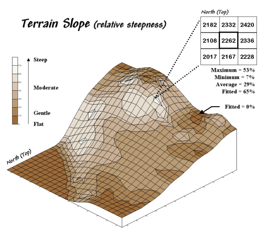
(0) *(Opcional)* Uma equipe multidisciplinar trabalhou em um grande projeto para estudo da possibilidade da instalação de uma estrutura de contenção de material industrial liquido. Após procedimento de modelagem de terreno, as seguinte função de elevação (em metros) foi obtida e plotada a seguir.

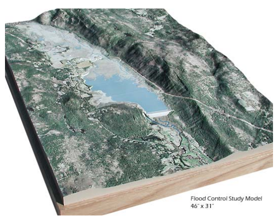
$$\begin{aligned} f(x,y) = & - .40xy\,\mathrm{sen}(((x-10)^2+(y-10)^2)) + .000125((2x-1)^3+2(2x-1)^2+x)+ \\ & + 6\cos(x)+\mathrm{sen}(2\pi y)+\mathrm{sen}(10\pi y)+6\,\mathrm{sen}(40\pi y) \end{aligned}$$

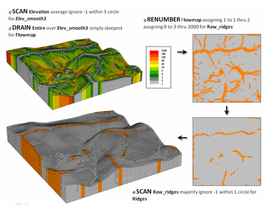


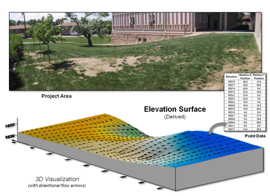
Supondo tal material homogêneo, e supondo uma estrutura de contenção de 10 metros de altura a partir da referência (um quadrado $[0,15]\times[0,15]$ de $225km^2$ em $z=0$), calcule o volume (em metros cúbicos) de material que pode ser depositado na estrutura sobre o terreno analisado.

A seguir, algumas imagens vistas em sala e que estão relacionadas a problemas como este.









(1) Calcule (usando coordenadas polares) a integral a seguir.

$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2}{(1+x^2+y^2)^2}\,dydx$$

R. π

(2) Suponha que a área de uma dada região no plano polar seja dada pela integral abaixo.

$$A = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_{\operatorname{cossec}\theta}^{2\operatorname{sen}\theta} r\,dr\,d\theta$$

Esboce a região e calcule sua área. R. $\pi/2$

(3) Prove que $\displaystyle\iint_R e^{-(x^2+y^2)}dA = \frac{1}{4}\pi(1-e^{-a^2})$, onde R é um quarto do circulo de raio a localizada no primeiro quadrante do plano-xy.

(4) Use coordenadas polares para mostrar que a integral dupla $\iint_R \frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}dA = 1$, onde R é a região no primeiro quadrante do plano-xy limitada por $x^2+y^2=1$.

(5) Use integrais duplas para calcular as áreas dos círculos $r=a$ e $r=2a\operatorname{sen}\theta$. O que dizer sobre a área na intersecção entre estes círculos?

(6) Use integrais duplas para calcular a área de um laço de $r=2a\cos 3\theta$. Faça o mesmo para um laço de $r=2a\cos 2\theta$.

R. $\pi a^2/2$

(7) Encontre a formula do volume da esfera de raio a. R. $4\pi a^3/3$

(8) Faz-se um buraco cilíndrico de raio b passando pelo centro de uma esfera de raio a.

(a) Calcule o volume do buraco. Observe que essa formula dá o volume da esfera quando $b=a$.
(b) Calcule o volume do sólido em forma de anel que restou. Expresse esse volume em termos da altura h do anel. Observe o fato notável de que esse volume depende apenas de h e não do raio a da esfera ou do raio b do buraco.

(9) Calcule a área englobada pelo laço direito da lemniscata $r^2=2a^2\cos 2\theta$.

(10) Use integração tripla para mostrar que o volume do sólido limitado pelo cilindro $x^2+y^2=25$, pelo plano $x+y+z=8$ e pelo plano-xy é 200π unidades cúbicas de volume.

Bom Estudo!