UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Segunda Lista de Exercícios de Introdução à Álgebra Linear - MTM112
Prof. Júlio César do Espírito Santo

24 de Abril de 2019 - AUT/EST

(1) Para as matrizes abaixo, calcule $A^T, B^T, AB, (AB)^T$ e $B^T A^T$. Constate que $(AB)^T = B^T A^T$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(2) Uma matriz A é chamada de *simétrica* quando $A^T = A$. Verifique que AB não precisa necessariamente ser simétrica sempre que A e B são simétricas. Use o exercício anterior.

(3) Determine, em termos do número real r, o que acontece com A^n quando n torna-se um inteiro positivo muito grande se

$$A = \begin{bmatrix} r & 1 \\ 0 & r \end{bmatrix}.$$

(4) Sejam dados arbitrariamente matrizes A e B e um escalar λ. Prove que

(a) $(A^T)^T = A$;
(b) $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$;
(c) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$;
(d) $(AB)^T = B^T A^T$.

(5) Mostre que A é simétrica *se, e somente se,* A^T for simétrica. Mostre também que se A for simétrica, então A^2 também será simétrica.

(6) Uma matriz A é chamada de *anti-simétrica* quando $A^T = -A$.

(a) Mostre que uma matriz anti-simétrica precisa ser quadrada e e sua diagonal principal só pode ser compostas por zeros.

(b) Mostre que, dada qualquer matriz A, a matriz $A - A^T$ é anti-simétrica e a matriz $A + A^T$ é simétrica.

(c) Escrevendo $A = \dfrac{A + A^T}{2} + \dfrac{A - A^T}{2}$, mostre que toda matriz quadrada pode ser *unicamente* escrita como soma de uma matriz simétrica e uma matriz anti-simétrica.

(7) Se $A = [a_{ij}]_{2\times 2}$ é tal que $a_{ij} = 1$ se $j = 1$ e $a_{ij} = (-1)^{i+j} i$ se $j = 2$. Escreva explicitamente a matriz A e resolva a seguinte equação matricial $AX = I_2$

(8) Encontre todas as matrizes reais A tais que $A^T A = 0$.

(9) Dadas duas matrizes A e B, é verdade que $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$?

(10) Inspire-se no exercicio anterior para mostrar que A e B são matrizes simétricas se, e somente se, $AB = BA$.

Bom Estudo!