# UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
# INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
# DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Segunda Lista de Exercícios de Introdução às EDO's - MTM125

Prof. Júlio César do Espírito Santo

02 de Novembro de 2017

(1) Para cada uma das equações abaixo determine o valor da constante $r$ para que $\phi(t) = \mathrm{e}^{rt}$ seja uma solução da EDO.

(a) $y' + 3y = 0$

(b) $y'' + 3y' + 2y = 0$

(c) $y'' - 4y = 0$

(d) $y''' - 3y'' + 2y' = 0$

[R. $-3$; $-1, -2$; $\pm 2$; $0, 1, 2$. ]

(2) Determine o valor da constante $r$ para que $\phi(x) = x^r$ seja uma solução da equação $x^2y'' - 4xy' + 4y = 0$ no intervalo $I = (0, +\infty)$.

[R. $1, 4$. ]

(3) Volterra fez o seguinte modelo matemático para descrever a competição dentre duas espécies que dividem o mesmo meio ambiente

$$\begin{array}{l} \dot{x} = x(\alpha - \beta y) \\ \dot{y} = y(\gamma x - \delta) \end{array},$$

utilizando a regra da cadeia o sistema pode ser reduzido à equação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(\gamma x - \delta)}{x(\alpha - \beta y).}$$

Ache a solução geral dessa equação.

[R. $\alpha \ln y - \beta y + \delta \ln x - \gamma x = c$ ]

(4) Resolva as equações diferenciais exatas que encontrar na seguinte lista. (Se não for exata, não resolva).

(a) $(2x + 3) + (2y - 2)y' = 0$

(b) $(2x + 4y)dx + (2x - 2y)dy = 0$

(c) $(e^x \operatorname{sen} y - 2y \operatorname{sen} x)dx + (e^x \cos y + 2\cos x)dy = 0$

(d) $(x^2 + y^2)y' + xe^{xy} + 1 = 0$

(e) $(x - y)y' + (y - x + 2) = 0$

(f) $y' = \dfrac{y - x + 1}{-x + y + 3}$

(g) $(e^x \operatorname{sen} y + 3y)dx - (3x - e^x \operatorname{sen} y)dy = 0$

(h) $y' = \sqrt{y}$

[R. $acefh.a : x^2 + 3x + y^2 - 2y = c$; $c : e^x \operatorname{sen} y + 2y \cos x = c$ e $y = 0$. ]

(5) Resolva os problemas de valor inicial

(a) $(x - y)y' = x - y - 2, \quad y(1) = 1$

(b) $y' = \dfrac{y - x + 1}{-x + y + 3}, \quad y(1) = 2.$

(6) Verifique se as equações a seguir são exatas e encontre a função $\psi(x, y)$ (chamada *integral primeira* da equação) tal que $\psi(x, y(x)) = c$ forneça a solução $y(x)$ da equação dada implicitamente. (Use um fator integrante para equações exatas se preciso).

(a) $(x^2 + 1)y' + 2xy - x^2 = 0$,

(b) $(3x^2 - y^2)y' - 2xy = 0$,

(c) $(\cos(x)\sec^2(y))y' - (sen(x)tg(y) + 1) = 0$

(d) $(x^2 - xy)y' + (xy - 1) = 0$

(e) $xy' + y = 0$

(f) $(3x^3y^4 + x)y' + y = 0$

(g) $y' = e^{2x} + y - 1$,

(h) $dx + (x/y - \operatorname{sen} y)dy = 0$

(i) $\left(3x + \dfrac{6}{y}\right) dx + \left(\dfrac{x^2}{y} + \dfrac{3y}{x}\right) dy = 0$

*Dica: Em (f) e em (i), use* $\mu(x, y) = \mu(x \cdot y) := \mu(v)$ *na EDP* $\mu_x N + \mu N_x - \mu_y M - \mu M y = 0$, *se preciso. Veja a formula em seu caderno.*

[R. $g.\mu(x) = e^{-x}$, $y = ce^x + 1 + e^{2x}$; $h.\mu(y) = y$, $xy + y\cos y - \operatorname{sen} y = c$; $i.\mu(x, y) = xy$, $x^3y + 3x^2 + y^3 = c$; ]

(7) Uma equação homogênea de primeira ordem é uma equação que pode ser escrita como

$$\frac{dy}{dx} = F(y/x).$$

Ou seja, o lado direito da equação acima, apesar de depender de $x$ e de $y$, depende apenas do quociente $y/x$. Prove que fazendo a substituição $v = y/x$, podemos transformar a equação acima em

$$\frac{1}{F(v) - v}\frac{dv}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Esta equação é separável?

[R. *Sim.* ]

(8) Resolva as equações homogêneas que encontrar na lista abaixo. Para isto, faça a mudança $v = y/x$ e note que $y' = v'x + v$. (Se não for homogênea, não resolva).

(a) $5x - y + 3xy' = 0$,

(b) $xy' + y = 3$,

(c) $e^{y/x} + y' - \dfrac{y}{x} = 0$

(d) $x^2 + y^2 - 2xy' = 0$

(e) $xy + 1 + y^2y' = 0$

(9) Dentre as equações abaixo que forem autônomas, encontre os pontos de equilibrio e classifique os como assintoticamente estável, instavel ou semi-estável. Desenhe a reta de fase, um campo de direções e, sobre ele, algumas curvas integrais.

(a) $y' = y(a - by)$,

(b) $y' = 12 - 2y$

(c) $y' = y^2(4 - y^2)$,

(d) $y' = (y - 2)^4$

(10) Zzz...

Bom Estudo!