

UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Curso de Matemática - Bacharelado

Segunda Lista de Exercícios de Introdução aos Espaços Métricos - MTM251
Prof. Júlio César do Espírito Santo

23 de Janeiro de 2017

- (1) Se (M, d) é um espaço métrico, prove que

$$\bar{d}(x, y) := \min\{d(x, y); 1\},$$

para $x, y \in M$ é uma métrica em M e que (M, \bar{d}) é um espaço métrico limitado.

- (2) Num espaço vetorial normado E , mostre que a norma $|\cdot| : E \rightarrow \mathbb{R}$ é uma contração fraca.

- (3) Seja E um espaço vetorial normado.

(a) Mostre que a operação de soma $s : E \times E \rightarrow E$ definida por $s(u, v) = u + v$ é uma contração fraca, quando se considera em $E \times E$ a norma da soma $|(u, v)|_1 = |u| + |v|$. Conclua que a função s é contínua (independente da norma em $E \times E$).

(b) Mostre que a operação $m : \mathbb{R} \times E \rightarrow E$, dada por $m(\lambda, x) = \lambda \cdot x$ é contínua.

- (4) Seja X o conjunto de todas as triplas ordenadas de zeros e uns. Mostre que X consiste de oito elementos e que podemos definir uma métrica d em X fazendo $d(x, y) =$ número de posições onde x e y tem entradas diferentes. (Este espaço é similar ao espaço das n -uplas, tem aplicações em Comutação,)

- (5) Atualmente, a maioria dos editores de texto oferece o recurso de correção ortográfica. Esse recurso, consiste em destacar, entre as palavras digitadas, aquelas com possíveis erros de grafia. Por exemplo, quando se digita a palavra “caza”, o recurso de correção destaca essa palavra, pois a palavra “caza” não existe na língua portuguesa. Também é comum o recurso de correção ortográfica sugerir outra palavra para substituir a palavra incorreta.

A sugestão de quais palavras devem substituir a palavra incorreta é feita com uma medida da distância entre a palavra incorreta e as palavras que constam no dicionário do editor de texto. Existem diversas maneiras de medir a distância entre as duas palavras. Uma delas é denominada *distância de Hamming*, na qual a medida da distância entre duas palavras x e y , com a mesma quantidade de letras, é feita da seguinte forma: $d(x, y) =$ número de letras que são diferentes em x e y , em suas respectivas posições. Mais formalmente, se $x = x_1x_2x_3 \cdots x_n$ e $y = y_1y_2y_3 \cdots y_n$ são palavras em que x_i, y_i são letras do alfabeto, para $i = 1, 2, 3, \dots, n$, então $d(x, y) = \#\{i : x_i \neq y_i, \text{ com } i = 1, 2, 3, \dots, n\}$, em que $\#(A)$ representa o número de elementos do conjunto A . Por exemplo, $d(\text{caza}, \text{casa}) = \#(3) = 1$, já que elas diferem apenas na terceira letra.

A partir dessas informações, faça o que se pede nos itens a seguir:

(a) Mostre que a distância de Hamming é uma métrica no conjunto das palavras com n letras.

(b) Mostre que o conjunto das palavras com n letras, munido da distância de Hamming, é um espaço métrico discreto.

Bom Estudo!