UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

2a. Lista de Matemática Aplicada à Engenharia de Controle e Automação - MTM146

Prof. Júlio César do Espírito Santo

16 de agosto de 2018

(1) Use a Desigualdade Triangular para provar que

$$|z_1 + z_2| \geq \Big| |z_1| - |z_2| \Big|.$$

(2) Em cada caso abaixo, represente vetorialmente (no mesmo) plano complexo os números z_1, z_2, $z_1 + z_2$ e $z_1 - z_2$, onde

(a) $z_1 = 1 + 2j$ e $z_2 = 3 + j$ (b) $z_1 = 2j$ e $z_2 = \dfrac{2}{3} - j$

(c) $z_1 = -\sqrt{3} + j$ e $z_2 = \sqrt{3}$ (d) $z_1 = -3 + j$ e $z_2 = 1 + 4j$

(3) Esboce no plano complexo o conjunto de pontos z que satisfazem cada uma das condições abaixo.

(a) $|z - 1 + j| < 3$ (b) $|z + j| \leq 3$

(c) $|z - j| = |z + j|$ (d) $\text{Re}(\overline{z} - j) = 2$

(e) $|z - 1 + j| = 1$ (f) $\text{Re}(1 - z) = |z|$

(g) $\text{Re}(z^2) < 0$ (h) $\text{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right) > \dfrac{1}{4}$

Dica: Lembre-se $|z_1 - z_2|$ representa a distância entre z_1 e z_2 e que $\text{Re}(x + jy) = x$

(4) Encontre todas as raízes complexas das equações abaixo.

(a) $s^2 - 2s + 2 = 0$

(b) $s^4 - 1 = 0$

(c) $s^4 + 4 = 0$

(d) $s^3 - s - 6 = 0$

(e) $s^3 + s^2 + s + 1 = 0$

a. Resp. $1 \pm j$. b. Resp. $\pm 1; \pm j$. c. Resp. $\pm 1 \pm j$.

(5) Mostre que

(a) $j(1 - j\sqrt{3})(\sqrt{3} + j) = 2 + 2j\sqrt{3}$

(b) $5j/(2 + j) = 1 + 2j$

(c) $(-1 + j)^7 = -8(1 + j)$

(d) $(1 + j\sqrt{3})^{-10} = 2^{-11}(-1 + j\sqrt{3})$

Para dicas para as letra (c) e (d) veja a nota de rodapé.[1]

Bons estudos!

[1]**Dica para (c):** Use a fórmula do Binômio de Newton abaixo:

$$(1 + z)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k,$$

onde n é um inteiro positivo e $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, ou seja

$$(1 + z)^n = 1 + \frac{n}{1!}z + \frac{n(n-1)}{2!}z^2 + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}z^k + \cdots + z^n.$$

Para obter os coeficientes binomiais $\binom{n}{k}$, você também pode construir o Triângulo de Pascal.

Dica para (d) Calcule $(1 + j\sqrt{3})^{-1}$, em seguida use o Binômio de Newton.