UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

2a. Lista de Matemática Aplicada à Engenharia de Controle e Automação - MTM146

Prof. Júlio César do Espírito Santo

18 de março de 2019

(1) Use as propriedades de módulo e conjugado para provar a Desigualdade Triangular:
$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

(2) Use a Desigualdade Triangular para provar que
$$|z_1 + z_2| \geq \Big| |z_1| - |z_2| \Big|.$$

Dica: Comece utilizando $|z_1| = |(z_1 + z_2) - z_2| \leq |z_1 + z_2| + |z_2|$

(3) Em cada caso abaixo, represente vetorialmente (no mesmo) plano complexo os números z_1, z_2, $z_1 + z_2$ e $z_1 - z_2$, onde

(a) $z_1 = 1 + 2j$ e $z_2 = 3 + j$

(b) $z_1 = 2j$ e $z_2 = \dfrac{2}{3} - j$

(c) $z_1 = -\sqrt{3} + j$ e $z_2 = \sqrt{3}$

(d) $z_1 = -3 + j$ e $z_2 = 1 + 4j$

(4) Esboce no plano complexo o conjunto de pontos z que satisfazem cada uma das condições abaixo.

(a) $|z + j| \leq 3$

(b) $|z - 2 + 3j| < \sqrt{5}$

(c) $\text{Im}(z) \geq 1$

(d) $\text{Re}(z) < 2$

(e) $|z - 1 + j| = |z + 1 - j|$

(f) $\text{Re}(\overline{z} - 3j) = 2$

(g) $|z - 1 + j| = 1$

(h) $\text{Re}(1 - z) = |z|$

(i) $\text{Re}(z^2) < 0$

(j) $\text{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right) > \dfrac{1}{4}$

Dica: Lembre-se $|z_1 - z_2|$ representa a distância entre z_1 e z_2 e que $\text{Re}(x + jy) = x$

(5) Para cada um dos números complexos abaixo, calcule o valor de $\theta = \arg(z)$.

(a) $z = 1 + \sqrt{3}j$, (b) $z = -1 + \sqrt{3}j$ (c) $z = -1 - \sqrt{3}j$

(d) $z = \dfrac{-2}{1 + j\sqrt{3}}$, (e) $z = \dfrac{j}{-2 - 2j}$, (f) $z = (\sqrt{3} - j)^6$.

Resp. $\pi/3; 2\pi/3; 4\pi/3; 2\pi/3; 5\pi/4; \pi$.

(6) Encontre todas as raízes complexas das equações abaixo.

(a) $s^2 + 2 = 0$ (b) $s^2 - 2s + 2 = 0$

(c) $s^4 - 1 = 0$ (d) $s^4 + 4 = 0$

(e) $s^3 - s - 6 = 0$ (f) $s^3 + s^2 + s + 1 = 0$

a. Resp. $\pm j\sqrt{2}$. b. Resp $1 \pm j$. c. Resp. $\pm 1; \pm j$. d. Resp. $\pm 1 \pm j$.

(7) Encontre a parte real e a parte imaginária dos números complexos z abaixo e escreva-os sob a forma $Re(z) + Im(z)j$.

(a) $j(1 - j\sqrt{3})(\sqrt{3} + j)$ (b) $5j/(2 + j)$

(c) $(1 - j)^2$ (d) $(-1 + j)^3$

(e) $(-1 + j)^7$ (f) $(1 + j\sqrt{3})^{-10}$

Para dicas para as letras (c), (d) e (e) veja a nota de rodapé.[1]

Bons estudos!

---

[1] **Dica para (c):** Use a fórmula do Binômio de Newton abaixo:

$$(1+z)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k,$$

onde n é um inteiro positivo e $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, ou seja

$$(1+z)^n = 1 + \frac{n}{1!}z + \frac{n(n-1)}{2!}z^2 + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}z^k + \cdots + z^n.$$

Para obter os coeficientes binomiais $\binom{n}{k}$, você também pode construir o Triângulo de Pascal.

Dica para (d) Calcule $(1 + j\sqrt{3})^{-1}$, em seguida use o Binômio de Newton.