UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Curso de Matemática - Bacharelado

Segunda Lista de Exercícios de Análise III - MTM228
Prof. Júlio César do Espírito Santo

25 de Abril de 2016

(1) (Riesz) Prove que para todo funcional linear $f \in (\mathbb{R}^n)^\star$, existe um único $y \in \mathbb{R}^n$ tal que
$$f(x) = <x, y>$$
para qualquer que seja $x \in \mathbb{R}^n$.

(2) Na nomenclatura do exercício anterior, mostre que a aplicação $f \mapsto y$ é um isomorfismo linear entre $\mathbb{R}^n$ e $(\mathbb{R}^n)' := \{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} / f$ é linear e contínua $\}$.

(3) Dado um subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$, *seu complemento ortogonal*, definido e denotado por
$$X^\perp := \{y \in \mathbb{R}^n / <x, y> = 0, \forall x \in \mathbb{R}^n\}$$
é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$. Mostre que se E é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$, então $E^{\perp\perp} = E$.

(4) (Adjunta) Sejam E e F espaços com produto interno e $T : E \to F$ uma aplicação (não necessariamente linear). Uma aplicação $T^\star : F \to E$ é a *adjunta de* T se satisfizer
$$<Tx, y> = <x, T^\star y>,$$
para todos $x \in E$ e $y \in F$.

É possível provar que essa aplicação, se existir, é única e linear.

No caso em que $E = \mathbb{R}^m$ e $F = R^n$ então existe a adjunta de uma transformação Linear $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ e além disso, todo elemento da imagem de T é ortogonal a um elemento do núcleo de da aplicação linear $T^\star$; isto é,
$$im(T) = (\ker T^\star)^\perp.$$

(5) Sejam $a \in \mathbb{R}^n$ um ponto qualquer, E um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ e $B = \{e_1, e_2, \ \ , e_k\}$ uma base ortonormal de E (isto é, uma base de E composta por vetores de norma um, dois-a-dois ortogonais).

Considerando
$$a_0 = \sum_{i=1}^{k} <a, e_i> e_i,$$
o vetor $a - a_0$ é ortogonal a todos os vetores de E e
$$||a - a_0|| \leq ||a - y||,$$
para todo $y \in E$.

A função $\Phi : E \to \mathbb{R}$ definida por
$$\Phi(y) = ||a - y||,$$
atinge seu valor mínimo num único ponto de E, a saber, o ponto a_0. Daí resulta que a_0 depende apenas de a mas não da base ortonormal escolhida em E.

A aplicação $\pi : \mathbb{R}^n \to E$ dada por
$$\pi(a) = a_0$$
é linear, seu núcleo é $E^\perp$ e todo vetor $z \in \mathbb{R}^n$ escreve-se de modo único como $z = x + y$, com $x \in E$ e $y \in E^\perp$, ou seja $\mathbb{R}^n = E \oplus E^\perp$.

Bom Descanso!