UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Terceira Lista de Exercícios de Cálculo II - MTM123
Prof. Júlio César do Espírito Santo

9 de outubro de 2018

(1) Calcule.

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$ (b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-sx}dx;\ s > 0$

(c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t}dt$ (d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{s^2+x^2}ds;\ s > 0$

R. $a.1/2$; b. $1/s$; c. 1; d.$\pi/(2s)$;

(2) Convergente ou Divergente? Justifique.

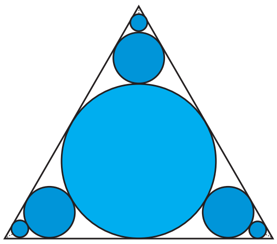
(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^5+3x+1}$ (b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^3+1}dx$

(c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos 3x}{x^3}dx$ (d) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x}dx$

(e) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos\sqrt{x}dx$

R. converge.diverge.converge.converge.converge

(3) Na figura abaixo, existem infinitos círculos se aproximando dos vértices de um triângulo equilátero. Cada círculo toca outros círculos e lados do triângulo. Se o triângulo tiver lados de comprimento 1, calcule a área total ocupada pelos círculos.



(4) Use as propriedades aritméticas dos limites para calcular, caso exista, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$, sendo a_n igual a

(a) $\dfrac{n^3+3n+1}{4n^3+2}$ (b) $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ (c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{3}{2}\right)^k$

(d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} t^k$ com $0 < t < 1$ (e) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos k\pi$

(5) Calcule, caso a série seja convergente, a soma da série dada.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\pi^{-n}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}[1+(-1)^n]$ (e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(4n+1)(4n+5)}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{4}{5}\right)^n$

R. 2, $1/6$, $\pi/(\pi-1)$, $diverge$, $1/4$, $diverge$.

(6) Calcule, caso a série seja convergente, a soma da série dada.

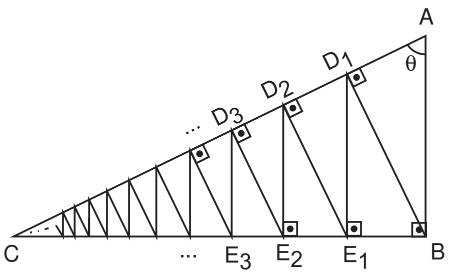
(a) $4+\frac{4}{5}+\frac{4}{25}+\cdots+\frac{4}{5^{n-1}}+\cdots$ (b) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{e^{-n}}$ (c) $\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}\Big)$

(d) $\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{3}{n(n+1)}-\frac{1}{2^n}\Big)$ (e) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{4+5n^2}$ (f) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n(n+1)}$

R. 5, *diverge*, 1/6, 2, *diverge*, 2.

(7) Sejam dois círculos C e D, de raio 1 que se tangenciam em um ponto P. Sejam T uma reta tangente em comum a C e a D, C_1 o círculo que tangencia T, C e D, C_2 o círculo que tangencia C_1, C e D, C_3 o circulo que tangencia C_2, C e D e, em geral, C_n o círculo que tangencia C_{n-1}, C e D, para $n>1$. Encontre uma expressão para o diâmetro de C_n, mostre que $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ é convergente e calcule a sua soma.

(8) Um triângulo ABC, retângulo em B é dado com o ângulo $\hat{A}=\theta$ e o comprimento $|AB|=b$. Sejam D_i, pontos do segmento AC e E_i, pontos do segmento BC, com $i=1,2,3,\cdots$. Sejam BD_1 perpendicular a AB, D_1E_1 perpendicular a BC, E_1D_2 perpendicular a AB e assim sucessivamente, formando a figura abaixo. Calcule o comprimento total de todas as retas



internas ao triângulo ABC; ié, $|BD_1|+|D_1E_1|+|E_1D_2|+|D_2E_2|+\cdots$, em função de b e θ.

(9) Calcule, caso a série seja convergente, a soma da série dada.

(a) $\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{2}{3}\Big)^n$ (b) $\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{5\sqrt{2}}{7}\Big)^n$ (c) $\sum_{n=0}^{+\infty}7\Big(-\frac{4}{7}\Big)^n$

(10) Calcule, caso possível, a soma da série dada.

(a) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n}{5^{n/2}}$ (b) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(3-\sqrt{5})^n}$ (c) $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\cdots$

(11) Determine se as séries abaixo convergem ou não. Justifique.

(a) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n^3}$ (b) $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots$ (c) $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\cdots$

R. *converge*, *converge*, *diverge*.

(12) Use o Teste da Integral para verificar se as séries abaixo convergem ou não. Justifique.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(3+2n)^2}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n+7}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-n^2}$

R. *converge, diverge, converge.*

(13) Use o Teste da Comparação para verificar se as séries abaixo convergem ou não. Justifique.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2+5^n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\sqrt{n}-1}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$

R. *converge, diverge, converge.*

(14) Use o Teste da Comparação por limite para verificar se as séries abaixo convergem ou não. Justifique.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n^2+3n}{\sqrt{5+n^5}}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{8n+\sqrt{n}}{5+n+2+n^{7/2}}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n^2+5n}{2^n(n^2+1)}$

R. *diverge, converge, converge.*

(15) (Teste da Série Alternada). Em 1705 o matemático alemão Gottfried Wilhelm von Leibniz observou que para que haja convergência de séries do tipo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n,$$

onde $a_n \geq 0$, chamadas *Séries Alternadas,* basta que $a_n \to 0$ e que

$$a_{n+1} \leq a_n$$

para todo n.

Use o teste de Leibniz para verificar a convergência das seguintes séries. Em caso de divergência, justifique.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt{n}}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n+2}$

Bom Estudo!