UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Terceira Lista de Exercícios de Cálculo Diferencial e Integral III/C - MTM124/703

Prof. Júlio César do Espírito Santo

25 de novembro de 2015

(1) Calcule a integral

$$\iiint_Q 3xy^3z^2 dV,$$

onde $Q = \{(x, y, z) | -1 \leq x \leq 3; \sqrt{2} \leq y \leq \sqrt{3}; 0 \leq z \leq 1\}$. `R.5`

(2) Calcule as integrais iteradas.

(a) $\int_0^1 \int_{1+x}^{2x} \int_z^{x+z} x dy dz dx$ (b) $\int_{-1}^2 \int_1^{x^2} \int_0^{x+y} 2x^2 y dz dy dx$

(c) $\int_2^3 \int_0^{3y} \int_1^{yz} (2x + y + z) dx dz dy$ `R.` $-12^{-1}; 513/8$

(3) Se as integrais abaixo representam o volume de um sólido Q do espaço, esboce esse sólido.

(a) $\int_0^1 \int_{\sqrt{1-z}}^{\sqrt{4-z}} \int_2^3 dx dy dz$ (b) $\int_0^1 \int_{z^3}^{\sqrt{z}} \int_0^{4-x} dy dx dz$

(c) $\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} \int_0^{x+y} dz dy dx$ (d) $\int_0^1 \int_x^{3x} \int_0^{xy} dz dy dx$

(e) $\int_1^2 \int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} \int_{-\sqrt{z-x^2}}^{\sqrt{z-x^2}} dy dx dz$ (f) $\int_1^4 \int_{-z}^{z} \int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} dx dy dz$

`R.` $14/3 - 2\sqrt{3}; 125/84$

(4) Nos items a seguir, esboce o sólido limitado pelos gráficos das expressões dadas e use uma integral tripla para obter seu volume.

(a) $z + x^2 = 4; y + z = 4; y = 0$ e $z = 0$ (b) $x^2 + z^2 = 4; y^2 + z^2 = 4$

(c) $y = 2 - z^2; y = z^2; x + z = 4; x = 0$ (d) $z = 4y^2; z = 2; x = 2; x = 0$

(e) $y^2 + z^2 = 1; x + y + z = 2; x = 0$ (f) $z = x^2 + y^2; y + z = 2$

(g) $z = 9 - x^2; z = 0; y = -1; y = 2$ (h) $z = e^{x+y}; y = 3x; x = 2; y = 0; z = 0$

(i) $z = x^2; z = x^3; y = z^2; y = 0$ (j) $y = x^2 + z^2; z = x^2; z = 4; y = 0$

`R.128/5;32/3;`2π`;108;1/70`

(5) Calcule $\iiint_E x^2 dV$, onde E é o sólido que está dentro de $x^2 + y^2 = 1$, acima de $z = 0$ e abaixo de $z^2 = 4x^2 + 4y^2$. Desenhe. R. $2\pi/5$

(6) Represente no espaço os seguintes pontos em coordenadas esféricas, em seguida, escreva-os em coordenadas cartesianas e em coordenadas cilíndricas: $P_1 = (1, 0, 0)$, $P_2 = (1, \pi, 0)$, $P_3 = (1, \pi/2, 2\pi)$, $P_4 = (1, \pi/2, \pi/2)$, $P_5 = (1, \pi/2, 3\pi/2)$, $P_6 = (\sqrt{2}, \pi/2, \pi/4)$, $P_7 = (\sqrt{3}, \mathrm{arctg}\sqrt{2}, \pi/4)$, $P_8 = (1, \pi/2, \pi/6)$, $P_9 = (1, \pi/2, \pi)$.

(7) Calcule o Jacobiano das transformações em $\mathbb{R}^3$ (neste caso a matriz é de ordem 3) que associam o sistema de coordenadas cartesianas com
   (a) o sistema de coordenadas cilíndricas, dada por $(x, y, z) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, z)$;
   (b) o sistema de coordenadas esféricas, dada por $(x, y, z) = (\rho\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta, \rho\cos\phi)$, para $\rho \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi$.

(8) Calcule as seguintes integrais. Use uma mudança de variáveis se preciso.

(a) $$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dzdydx$$

(b) $$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2} (x^2 + y^2)^{3/2} dzdydx$$

(c) $$\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2-y^2}} z\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}dzdydx$$

R. $4\pi(e - 1)/3$; $8\pi/35$; $243\pi/5$

(9) Descreva a superfície dada em coordenadas esféricas por $\rho = \cos 2\theta$.

(10) Calcule

$$\int_0^{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\sec\phi} \mathrm{sen}(2\phi)d\rho d\phi d\theta.$$

(11) Integre $x^2 + y^2 + z^2$ sobre o cilindro $x^2 + y^2 \leq 2, -2 \leq z \leq 3$. R. $100\pi/3$

(12) Calcule, por coordenadas esféricas, o volume de uma esfera de raio a. R. $4\pi a^3/3$

(13) Seja B o sólido, no primeiro octante, contido entre as superfícies $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Use coordenadas esféricas para calcular $\iiint_B zdxdydz$. R. $15\pi/16$

(14) Seja $B = \{(x, y, x) | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ a bola unitária. Use uma mudança de variáveis conveniente para calcular $\iiint_B (2 + x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}dxdydz$.

(15) Calcule $\iiint_S (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}dxdydz$, onde S o sólido limitado pelas duas esferas $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ e $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$, onde $0 < b < a$. R. $4\pi\ln(b/a)$.

(16) Seja o elipsóide

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1,$$

onde a, b e c são constantes positivas.

(a) Encontre seu volume. `R.` $\frac{4}{3}\pi abc$.

(b) Use mudança para coordenadas esféricas para calcular

$$\iiint_E \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}dxdydz,$$

onde E é o elipsóide do *item* anterior. `R.` $\frac{4}{5}\pi abc$.

FIGURA 1. Exemplo de aplicação de um elipsóide na indústria: **Ellipsoid-Shaped Low Drag Buoy**. Para detalhes, visite http://www.mooringsystems.com/buoyancy.htm

(17) A região entre as duas hipérboles $4y^2-z^2=4$ e $4y^2-z^2=16$ e entre os raios $z=\pm y$ para $y\geq 0$ é rotacionada em tôrno do eixo z para obtenção de uma região sólida E. Procuramos a integral tripla de $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$. sobre E. Esboce essa região e calcule essa integral.
`R. Sem resposta: Ninguém jamais resolveu este exercício.`

Bom Estudo!