

UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Terceira Lista de Exercícios de Cálculo Diferencial e Integral III - MTM124
 Prof. Júlio César do Espírito Santo

24 de maio de 2016

(1) Calcule a integral

$$\iiint_Q 3xy^3z^2 dV,$$

onde $Q = \{(x, y, z) \mid -1 \leq x \leq 3; \sqrt{2} \leq y \leq \sqrt{3}; 0 \leq z \leq 1\}$. R. 5

(2) Calcule as integrais iteradas.

$$(a) \int_0^1 \int_{1+x}^{2x} \int_z^{x+z} x dy dz dx \qquad (b) \int_{-1}^2 \int_1^{x^2} \int_0^{x+y} 2x^2 y dz dy dx$$

$$(c) \int_2^3 \int_0^{3y} \int_1^{yz} (2x + y + z) dx dz dy \qquad \text{R. } -12^{-1}; 513/8$$

(3) Se as integrais abaixo representam o volume de um sólido Q do espaço, esboce esse sólido.

$$(a) \int_0^1 \int_{\sqrt{1-z}}^{\sqrt{4-z}} \int_2^3 dx dy dz \qquad (b) \int_0^1 \int_{z^3}^{\sqrt{z}} \int_0^{4-x} dy dx dz$$

$$(c) \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} \int_0^{x+y} dz dy dx \qquad (d) \int_0^1 \int_x^{3x} \int_0^{xy} dz dy dx$$

$$(e) \int_1^2 \int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} \int_{-\sqrt{z-x^2}}^{\sqrt{z-x^2}} dy dx dz \qquad (f) \int_1^4 \int_{-z}^z \int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} dx dy dz$$

R. $14/3 - 2\sqrt{3}; 125/84$

(4) Nos itens a seguir, esboce o sólido limitado pelos gráficos das expressões dadas e use uma integral tripla para obter seu volume.

- | | |
|---|--|
| (a) $z + x^2 = 4; y + z = 4; y = 0$ e $z = 0$ | (b) $x^2 + z^2 = 4; y^2 + z^2 = 4$ |
| (c) $y = 2 - z^2; y = z^2; x + z = 4; x = 0$ | (d) $z = 4y^2; z = 2; x = 2; x = 0$ |
| (e) $y^2 + z^2 = 1; x + y + z = 2; x = 0$ | (f) $z = x^2 + y^2; y + z = 2$ |
| (g) $z = 9 - x^2; z = 0; y = -1; y = 2$ | (h) $z = e^{x+y}; y = 3x; x = 2; y = 0; z = 0$ |
| (i) $z = x^2; z = x^3; y = z^2; y = 0$ | (j) $y = x^2 + z^2; z = x^2; z = 4; y = 0$ |

R. $128/5; 32/3; 2\pi; 108; 1/70$

- (5) Calcule $\iiint_E x^2 dV$, onde E é o sólido que está dentro de $x^2 + y^2 = 1$, acima de $z = 0$ e abaixo de $z^2 = 4x^2 + 4y^2$. Desenhe. R. $2\pi/5$
- (6) Represente no espaço os seguintes pontos em coordenadas esféricas, em seguida, escreva-os em coordenadas cartesianas e em coordenadas cilíndricas: $P_1 = (1, 0, 0)$, $P_2 = (1, \pi, 0)$, $P_3 = (1, \pi/2, 2\pi)$, $P_4 = (1, \pi/2, \pi/2)$, $P_5 = (1, \pi/2, 3\pi/2)$, $P_6 = (\sqrt{2}, \pi/2, \pi/4)$, $P_7 = (\sqrt{3}, \arctg\sqrt{2}, \pi/4)$, $P_8 = (1, \pi/2, \pi/6)$, $P_9 = (1, \pi/2, \pi)$.
- (7) Calcule o Jacobiano das transformações em \mathbb{R}^3 (neste caso a matriz é de ordem 3) que associam o sistema de coordenadas cartesianas com
- o sistema de coordenadas cilíndricas, dada por $(x, y, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$;
 - o sistema de coordenadas esféricas, dada por $(x, y, z) = (\rho \cos \phi \cos \theta, \rho \cos \phi \sin \theta, \rho \sin \phi)$, para $\rho \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi$.
- (8) Calcule as seguintes integrais. Use uma mudança de variáveis se preciso.
- $\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dz dy dx$
 - $\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2} (x^2 + y^2)^{3/2} dz dy dx$
 - $\int_{-3}^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^{\sqrt{9-x^2-y^2}} z \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dz dy dx$
- R. $4\pi(e-1)/3; 8\pi/35; 243\pi/5$
- (9) Descreva a superfície dada em coordenadas esféricas por $\rho = \cos 2\theta$.
- (10) Calcule
- $$\int_0^\pi \int_0^{\pi/4} \int_0^{\sec \phi} \sin(2\phi) \rho d\rho d\phi d\theta.$$
- (11) Integre $x^2 + y^2 + z^2$ sobre o cilindro $x^2 + y^2 \leq 2, -2 \leq z \leq 3$. R. $100\pi/3$
- (12) Calcule, por coordenadas esféricas, o volume de uma esfera de raio a .
R. $4\pi a^3/3$
- (13) Seja B o sólido, no primeiro octante, contido entre as superfícies $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Use coordenadas esféricas para calcular $\iiint_B z dx dy dz$. R. $15\pi/16$
- (14) Seja $B = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ a bola unitária. Use uma mudança de variáveis conveniente para calcular $\iiint_B (2 + x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} dx dy dz$.
- (15) Calcule $\iiint_S (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} dx dy dz$, onde S o sólido limitado pelas duas esferas $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ e $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$, onde $0 < b < a$. R. $4\pi \ln(b/a)$.

(16) Seja o elipsóide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1,$$

onde a , b e c são constantes positivas.

(a) Encontre seu volume.

R. $\frac{4}{3}\pi abc$.

(b) Use mudança para coordenadas esféricas para calcular

$$\iiint_E \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} dx dy dz,$$

onde E é o elipsóide do item anterior.

R. $\frac{4}{5}\pi abc$.



FIGURA 1. Exemplo de aplicação de um elipsóide na indústria: **Ellipsoid-Shaped Low Drag Buoy**. Para detalhes, visite <http://www.mooringsystems.com/buoyancy.htm>

- (17) A região entre as duas hipérbolas $4y^2 - z^2 = 4$ e $4y^2 - z^2 = 16$ e entre os raios $z = \pm y$ para $y \geq 0$ é rotacionada em torno do eixo z para obtenção de uma região sólida E . Procuramos a integral tripla de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sobre E . Esboce essa região e calcule essa integral.
R. Sem resposta: Ninguém jamais resolveu este exercício.

Bom Estudo!