UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Terceira Lista de Exercícios de Introdução à Álgebra Linear - MTM112
Prof. Júlio César do Espírito Santo

24 de Abril de 2019 - AUT/EST ♡ - AUT/EST

(1) Prove que se A e B são matrizes quadradas *não-singulares* (o que significa que são *invertíveis*), então valem:

(a) A inversa da matriz A, denotada por A^{-1} é única.
(b) $(A^{-1})^{-1} = A$.
(c) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
(d) $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

(2) Prove que, para qualquer matriz quadrada A, o produto AA^T é uma matriz simétrica.

(3) Uma matriz quadrada A diz-se *idempotente* se $A^2 = A$.

(a) Mostre que se $AB = A$ e $BA = B$, então A e B são idempotentes.

(b) Se A é idempotente, mostre que $B = I - A$ é idempotente e que $AB = BA = 0$.

(4) Mostre que $A^2 = A$ para $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

(5) Encontre $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que o sistema homogêneo $(A - \lambda I)X = 0$ admita solução não-trivial para as matrizes A dadas:

(a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ (c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ (e) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (f) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(6) Se possível, use operações elementares sobre as linhas da matriz para obter a inversa das matrizes

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad F = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

(7) Se as matrizes acima são as matrizes dos coeficientes de um sistema cuja matriz dos termos independentes é, respectivamente, $B_1 = [0\ 1\ 2\ 3]^T$ e $B_2 = [0 \quad -1 \quad +2 \quad -3]^T$. Obtenha o conjunto solução destes sistemas.

(8) Cada uma das seguintes matrizes é a matriz aumentada de um sistema linear. Determine quando o sistema tem muitas, tem única ou não tem solução. No caso de soluções, exibir todas elas.

$$A = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \qquad B = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right],$$

$$C = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \text{e} \quad D = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right].$$

(9) Encontre α para os quais o sistema abaixo possui soluções. Obtenha-as.

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 4 \\ 2x + y - z = 1 \\ 3x - 2y + z = \alpha \end{cases}$$

(10) Encontre o conjunto solução dos sistemas abaixo usando o método de Gauss-Jordan.

(a) $$\begin{cases} x_1 + x_2 & = & 3 \\ x_1 - x_2 & = & -1 \end{cases}$$

(b) $$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 & = & 8 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 & = & 1 \\ 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 & = & 10 \end{cases}$$

(c) $$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 & = & 0 \\ -2x_1 + 5x_2 + 2x_3 & = & 1 \\ 8x_1 + x_2 + 4x_3 & = & -1 \end{cases}$$

(d) $$\begin{cases} -2x_2 + 3x_3 & = & 1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 3x_3 & = & -2 \\ 6x_1 + 6x_2 + 3x_3 & = & 5 \end{cases}$$

(e) $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 & = & 1 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 & = & -2 \\ 3x_1 - 7x_2 + 2x_3 & = & -1 \end{cases}$$

(f) $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 & = & 2 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 & = & -1 \\ 3x_1 - 7x_2 + 2x_3 & = & 2 \end{cases}$$

Resp. 10. $S = \{(1,2)\}$; $S = \{(3,1,2)\}$; $S = \{(-1/7, 1/7, 0) + \alpha(-3/7, -4/7, 1) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$; $S = \emptyset$; $S = \{(9,4,0) + \alpha(-3,-1,1) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$

Bom Estudo!