**UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO**
**INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS**
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**

Terceira Lista de Exercícios de Introdução às EDO's - MTM125
Prof. Júlio César do Espírito Santo
16 de Dezembro de 2017

(1) Use o Teorema de Existência e Unicidade de EDO's lineares para determinar um intervalo no qual os problemas à valores inicial abaixo admita única solução.

(a) $\begin{cases} ty' + 2y = 4t^2, \\ y(1) = 2, \end{cases}$ (b) $\begin{cases} y'' + \dfrac{3y}{t} = 1, \\ y(1) = 1, \\ y'(1) = 2, \end{cases}$

(c) $\begin{cases} (t^2 - 3t)y'' + ty' - (t+3)y = 0, \\ y(1) = 2, \\ y(1) = 1, \end{cases}$ (d) $\begin{cases} (x-4)y'' + xy' + \ln|x|y = 0, \\ y(1) = 0, \\ y(1) = 1, \end{cases}$

.

[R. a.$(0, +\infty)$ veja [1] pag 36, b.$(0, +\infty)$, c.$(0, 3)$, veja [1] pag 74, d.$(0, 4)$ ]

(2) Determine as trajetórias ortogonais à
(a) família de parábolas $y = cx^2$;
(b) família de hipérboles $y = c/x$ e
(c) família de circunferências $x^2 + (y-c)^2 = c^2$.
Use o software Geogebra (geogebra.org) ou qualquer outro para plotar estas curvas e suas trajetórias ortogonais.

(3) Determine a solução geral para cada uma das seguintes equações

(a) $\ddot{x} + 5\dot{x} + 6x = 0$; (b) $\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 0$; (c) $\ddot{x} + \dot{x} + x = 0$;
(d) $\ddot{x} - 5\dot{x} + 6x = 0$; (e) $\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = 0$; (f) $\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = 0$;

[R. $a.x(t) = c_1e^{-2t} + c_2e^{-3t}, b.x(t) = c_1e^{-2t} + c_2te^{-2t}$,
$c.x(t) = c_1e^{-t/2}\cos(\sqrt{3t}/2) + c_2e^{-t/2}\operatorname{sen}(\sqrt{3t}/2)$ ver [1] pgs 71,86,84.]

(4) Obtenha a soluções de cada um dos problemas de valor inicial a seguir.

(a) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{2t-1}{3x^2-3}, \\ x(1) = 0, \end{cases}$ (b) $\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} + 5\dfrac{dy}{dt} + 6y = 0, \\ y(0) = 2, \\ y'(0) = 3, \end{cases}$ (c) $\begin{cases} 4y'' - 8y' + 3y = 0, \\ y(0) = 2, \\ y(0) = 1/2. \end{cases}$

.

[R. $x^3 - 3x - t^2 + t = 0, y = 2e^{-3t}(3e^t - 2), y = -(1/2)(e^{x/2}(e^x - 5))$ ]

(5) Para cada par de funções abaixo, calcule o Wronskiano $W[y_1, y_2](t)$.

(a) $y_1(t) = e^{2t}$ e $y_2(t) = e^{-3t/2}$

(b) $y_1(t) = \cos t$ e $y_2(t) = \operatorname{sen} t$

(c) $y_1(x) = x$ e $y_2(x) = xe^x$

(d) $y_1(\theta) = \cos^2\theta$ e $y_2(\theta) = 1 + \cos(2\theta)$

[R. $-7e^{t/2}/2, 1, x^2e^x, 0.$ ]

(6) Conhecendo $\phi_1(t)$, use o método de redução de ordem para obter uma segunda solução $\phi_2(t)$ para as equações abaixo.

(a)$2t^2y'' + 3ty' - y = 0$, com $t > 0$ e $\phi_1(t) = t^{-1}$;

(b)$(x-1)y'' - xy + y = 0$, com $x > 1$ e $\phi_1(x) = e^x$;

(c)$ay'' + by' + cy = 0$, com $b^2 - 4ac = 0$ e $\phi_1(t) = e^{-bt/2a}$.

[R. $\sqrt{t}, x, te^{-bt/2a}$ ver [1] pag 87,88. ]

(7) (*Equação de Legendre*) A equação

$$(1-t^2)y'' - 2ty' + \lambda(\lambda+1)y = 0, \qquad t \in (-1, 1), \tag{0.1}$$

é conhecida como a *Equação de Legendre*, onde $\lambda$ é um parâmetro. Considere a Equação de Legendre com $\lambda = 1$:

$$(1-t^2)y'' - 2ty' + 2y = 0. \tag{0.2}$$

(a) Verifique que $\phi_1(t) = t$ é uma solução de (0.2).
Desejamos determinar outra solução $\phi_2(t)$ para (0.2) sob a forma

$$\phi_2(t) = v(t)\phi_1(t) \tag{0.3}$$

. (b) Substitua (0.3) na equação (0.2) e usando $z = v'$, obtenha a equação

$$z' + \left(\frac{2}{t} - \frac{2t}{1-t^2}\right) z = 0. \tag{0.4}$$

(c) Obtenha a solução

$$z(t) = \frac{C}{t^2(1-t^2)}$$

da equação de primeira ordem (0.4).
(d) Integre $z(t)$ (sugiro usar frações parciais) para obter

$$v(t) = C\left[-\frac{1}{t} + \frac{1}{2}\ln\frac{1+t}{1-t}\right]$$

(e) Conclua escrevendo uma expressão para $\phi_2(t)$.

(8) *(Variação dos Parâmetros)* Use o método de Variação dos Parâmetros para obter a solução geral das equações e, quando for o caso, obter a solução dos problemas de valores inicial.

(a) $y'' - 5y' + 6y = e^t$ (b) $y'' + y = \sec t$

(c) $y'' + 4y = 3\,\mathrm{cossec}\, t$ (d) $\begin{cases} y'' + y = \sec t, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = -2, \end{cases}$

(e) $y'' + y = \cos t$ (f) $\begin{cases} y'' + y' = 2 + t^2, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 2, \end{cases}$

$a.y(t) = c_1e^{3t} + c_2e^{2t} + e^t/2, b.y(t) = c_1 \cos t + c_2 \,\mathrm{sen}\, t + \cos t \ln|\cos(t)| + t \,\mathrm{sen}\, t,$ ]
$c.c_1 \cos 2t + c_2 \,\mathrm{sen}\, 2t + 3 \,\mathrm{sen}\, t + (3/2)\,\mathrm{sen}(2t) ln(\mathrm{sen}(t/2)) - (3/2)\,\mathrm{sen}(2t)\ln(\cos(t/2));$ ]
$d.y = (t-2)\,\mathrm{sen}\, t + \cos t(\ln(\cos(t)) + 1); e.y(t) = c_1 \cos t + c_2 \,\mathrm{sen}\, t + t\,\mathrm{sen}\, t/2 \; f.y = t^3/3 - t^2 + 4t + 2e^{-t} - 1$ ]

(9) *(Coeficientes à Determinar )* Use o método dos Coeficientes à Determinar para obter a solução geral das equações e, quando for o caso, obter a solução dos problemas de valores inicial.

(a) $y'' - 5y' + 6y = e^t$ (b) $y'' - 3y' - 4y = 3e^{2t}$

(c) $y'' + y = \cos t$ (d) $\begin{cases} y'' + y' - 2y = 2t, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1, \end{cases}$

$a.y(t) = c_1e^{3t} + c_2e^{2t} + e^t/2; b.y(t) = c_1e^{-t} + c_2e^{4t} - e^{2t}/2$ ]
$c.y(t) = c_1 \,\mathrm{sen}\, t + c_2 \cos t + t\,\mathrm{sen}\, t/2; d.y(t) = e^{-}e^{-2t}/2 - t - 1/2$ ver [1] pag 92. ]

(10) Obtenha a solução geral das equações relativas ao sistema massa-mola abaixo. Considere $\omega_0^2 = k/m$.

(a) Vibrações Livres, não amortecidas:

$$mu'' + ku = 0;$$

(b) Vibrações Forçadas, não amortecidas:

$$mu'' + ku = F_0 \cos \omega t$$

com $\omega \neq \omega_0$;

(c) Vibrações Forçadas, não amortecidas:

$$mu'' + ku = F_0 \cos \omega t$$

com $\omega = \omega_0$.

[R. $a.u(t) = A\cos\omega_0 t + B\,\mathrm{sen}\,\omega_0 t$; $b.u(t) = A\cos\omega_0 t + B\,\mathrm{sen}\,\omega_0 t + \frac{F_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)}\cos\omega t$;
$c.u(t) = A\cos\omega_0 t + B\,\mathrm{sen}\,\omega_0 t + \frac{F_0}{2m\omega_0} t\,\mathrm{sen}\,\omega_0 t$ ]

Bom Estudo!

Referências

[1] W. E. Boyce & R. C. DiPrima -*Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno* - 7ed LTC 2002