UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Curso de Matemática - Bacharelado

Terceira Lista de Exercícios de Análise III - MTM228
Prof. Júlio César do Espírito Santo

5 de Maio de 2016

(1) Escreva a maior lista de contra-exemplos que voce consiga. Troque idéias com seus colegas.

(2) Seja $n > 1$. Independente da norma $|| \cdot ||$, adotada em $\mathbb{R}^n$, a esfera

$$\mathbb{S}^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, ||x|| = 1\}$$

é um conjunto infinito.

(3) (Conjuntos Convexos) Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$ e $Y \subset \mathbb{R}^n$. Os conjuntos X e Y são convexos se, e somente se, $X \times Y \subset \mathbb{R}^{m+n}$ for convexo. A intersecção de uma família arbitrária de conjuntos convexos é um conjunto convexo e o fecho de um conjunto convexo é um conjunto convexo.

(4) † (Envoltória Convexa). Seja $X \subset \mathbb{R}^n$. A Envoltória Convexa de X é a intersecção $C(X)$ de todos os subconjuntos convexos de $\mathbb{R}^n$ que contém X. Prove que

$$C(X) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i \Big/ x_i \in X;\ \alpha_i \geq 0;\ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1 \right\}.$$

(5) A união de uma família arbitrária de conjuntos conexos com um ponto em comum é um conjunto conexo.

(6) Sejam $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua e $X \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto fechado e limitado. A imagem de X por f é um conjunto fechado e limitado.

(7) Seja $f : X \to Y$ um homeomorfismo. Um conjunto $A \subset X$ é aberto em X se, e somente, se a imagem de A por f é aberta em Y.

(8) † O conjunto das aplicações lineares injetivas é aberto em $L(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)$, assim como o conjunto das aplicações lineares sobrejetivas. Em todo conjunto aberto não vazio $\mathcal{O}$ de $L(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)$, existe uma aplicação linear injetiva (se $m \leq n$) ou sobrejetiva (se $m \geq n$).

(9) † Dada uma aplicação linear $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, e fixadas as normas em $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$, a imagem por A da esfera unitária $\mathbb{S}^{m-1}$ é um conjunto limitado em $\mathbb{R}^n$. Utilizando, para cada $A \in L(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)$, $||A|| = \sup\{||Ax||; x \in \mathbb{S}^{m-1}\}$, a aplicação $A \mapsto ||A||$ é uma norma no espaço vetorial $L(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)$.

Temos ainda:

$$||Ax|| \leq ||A||\,||x||,$$

para todo $A \in L(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)$ e

$$||AB|| \leq ||A||\,||B||,$$

para todos $A, B \in L(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)$.

(10) † (Derivada como Aplicação Linear) Seja $P_3(\mathbb{R})$ o espaço vetorial dos polinômios de grau até 3 com coeficientes reais. Este espaço pode ser identificado ao $\mathbb{R}^4$ e a transformação $D : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ dada por $p(x) \mapsto D(p(x)) = p'(x)$ é linear com matriz com relação à base canônica $B = \{1, x, x^2, x^3\}$ de $P_3(\mathbb{R})$ sendo $[D] = [a_{ij}]_{4\times 4}$ onde $a_{ij} = i$ se $i = j + 1$ e $a_{ij} = 0$, caso contrário.

(11) (Projeção Ortogonal e Estereográfica) O cone $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$ é homeomorfo à $\mathbb{R}^2$ e a esfera $\mathbb{S}^n$ da qual desconsideramos o pólo norte $N = (0,0,0,\ldots,0,1) \in \mathbb{S}^n$ é homeomorfo à $\mathbb{R}^n$.

(12) (Superfície, Esfera & Toro) Um conjunto $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^m$, chama-se *superfície de dimensao n*, quando para todo $x \in \mathcal{M}$, existem um conjunto V, aberto de $\mathcal{M}$ contendo x, um aberto V_0 de $\mathbb{R}^n$ e um homeomorfismo $\varphi : V_0 \to V$.

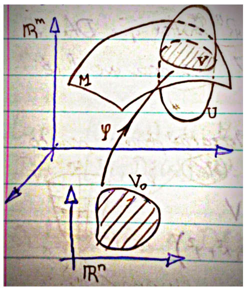

FIGURA 1. Superfície de Dimensão n

(a) Prove que a esfera $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ é uma superfície de dimensão $n-1$.

(b) Prove que se $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^k$ for uma superfície de dimensão m e se $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^p$ for uma superfície de dimensão n, então $M \times N \subset \mathbb{R}^{k+p}$ é ums superfície de dimensão $m+n$. Em particular o toro é uma superfície de dimensão 2.

(13) (Álgebra) Uma *algebra* $\mathcal{A}$ sobre o corpo $\mathbb{K}$ é um espaço vetorial $\mathcal{A}$ sobre $\mathbb{K}$ tal que munida de uma aplicação $m : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ (chamada multiplicação) a qual é bilinear. Isto é para todos $x, y, z \in \mathcal{A}$ e $c \in \mathbb{K}$ temos

$$\begin{aligned}(x+y)z &= xz + yz,\\ (cx)y &= c(xy),\\ x(y+z) &= xy + xz,\\ x(cy) &= c(xy).\end{aligned}$$

Se além da bilinearidade da multiplicação tivermos $x(yz) = (xy)z$, dizemos que a álgebra é *associativa*. Se além da bilinearidade da multiplicação tivermos $xy = yx$ dizemos que a álgebra é *comutativa*; se a multiplicação admitir a existência de $e \in \mathcal{A}$, tal que $ex = xe = x$, dizemos que a álgebra *tem elemento unitario* (ou unidade) e. Uma álgebra é chamada de álgebra normada se for uma álgebra associativa e um espaço vetorial normado cuja norma satisfaça

$$||xy|| \leq ||x|| \cdot ||y||.$$

Uma álgebra normada completa é chamada de *Algebra de Banach.*

(a) Mostre que se uma álgebra tem unidade e, este elemento é único.

(b) Responda: Seria $\mathbb{R}^3$ munido do produto vetorial uma álgebra sobre $\mathbb{R}$? Se afirmativo, o que mais se pode dizer a respeito desta álgebra? Você consegue dar mais exemplos de álgebras?

(14) O *Grupo Linear Geral* $GL_n(\mathbb{R}) := \{T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n / T$ é linear e $\det(T) = 0\}$ constitui um grupo com a operação de composição de funções.

(15) † (Funções Convexas) Se $C \subset \mathbb{R}^m$ é um conjunto convexo, uma função $f : C \to \mathbb{R}$ chama-se convexa quando para quaisquer $x, y \in C$ e $t \in [0,1]$, tem-se

$$f(ty + (1-t)x) \leq tf(y) + (1-t)f(x).$$

Mostre que qualquer que seja $f : C \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ função convexa e todo $c \in \mathbb{R}$, o conjunto dos pontos $x \in C$ tais que $f(x) \leq c$ é convexo. Dê um exemplo mostrando que a recíproca é falsa.

Bom Descanso!