UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Quarta Lista de Exercícios de Cálculo Diferencial e Integral I - MTM122

Prof. Júlio César do Espírito Santo

23 de Janeiro de 2017

(1) Expresse os ângulos 15°, 120° e 630° em radianos.

(2) A base de um triângulo isósceles é 10. Expresse sua área A como função do ângulo do vértice θ.

(3) ⋆ Utilize as identidades trigonométricas já estabelecidas para provar as seguintes.

(a) $\cos^3\theta = cos\theta - \sin^2\theta\cos\theta$

(b) $\sin^4\theta = \dfrac{1}{4}(1 - 2\cos 2\theta + \dfrac{1}{2}(1+\cos 4\theta))$

(c) $\dfrac{\sec^2\theta + \sec\theta\tan\theta}{\sec\theta + \tan\theta} = \sec\theta$

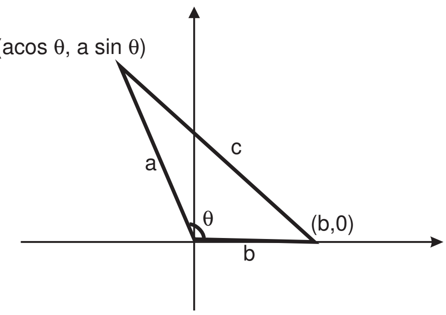
(d) $\sin 4\theta \cos 5\theta = \dfrac{1}{2}(\sin 9\theta - \sin\theta)$

(e) $\text{cossec}^6\theta = \text{cotg}^4\theta\text{cossec}^2\theta + 2\text{cotg}^2\theta\text{cossec}^2\theta + \text{cossec}^2\theta$.

(4) Demonstre a *Lei dos Cossenos*

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta,$$

que dá o valor do terceiro lado de um triângulo [ver figura] em termos de dois lados dados, a e b e do ângulo por eles formado θ.



(5) Neste problema esboçamos um método para provar as identidades

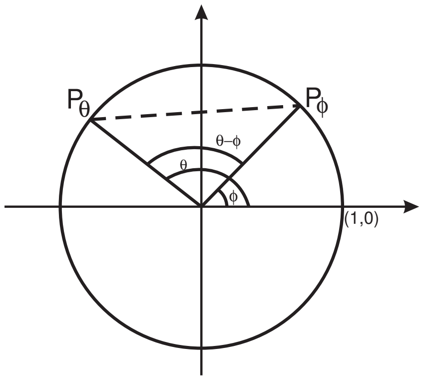
$$\sin(\theta+\phi) = \sin\theta\cos\phi + \sin\phi\cos\theta \quad \text{e} \tag{0.1}$$
$$\cos(\theta+\phi) = \cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi \tag{0.2}$$

estabelecendo primeiro

$$\cos(\theta-\phi) = \cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi. \tag{0.3}$$

A figura a seguir mostra a circunferência de raio unitário com dois ângulos arbitrários θ e ϕ e seus correspondentes pontos $P_\theta = (\cos\theta, \sin\theta)$ e $P_\phi = (\cos\phi, \sin\phi)$.

(a) Calcule o quadrado da distância entre esses pontos de duas maneiras: usando a fórmula da distância e a lei dos cossenos, provando assim a expressão (0.3) acima.



(b) Use a parte (a) para provar (0.2).

(c) Use a parte (a) para provar que $\cos(\frac{\pi}{2} - \phi) = \sin\phi$.

(d) Use a parte (c) para mostrar que $\sin(\frac{\pi}{2} - \phi) = \cos\phi$.

[Dica: Substitua ϕ por $\frac{\pi}{2} - \phi$].

(e) Use as partes (a), (c) e (d) para provar a identidade (0.1).

[Hint: $\sin(\theta+\phi) = \cos[\frac{\pi}{2} - (\theta+\phi)] = \cos[(\frac{\pi}{2} - \theta) - \phi] = \cdots$]

(6) Deduza fórmulas para $\sin 3\theta$ e $\cos 3\theta$ em termos de $\sin\theta$ e $\cos\theta$.

(7) Use o binômio de Newton para expandir a expressão $\cos^8\theta$.

(8) (a) Disponha no ciclo trigonométrico os pontos $P_\theta = (\cos\theta, \sin\theta)$, para cada um dos ângulos θ a seguir

$$0,\ \frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2},\ 2\frac{\pi}{3},\ 3\frac{\pi}{4},\ 5\frac{\pi}{6},\ \pi,\ 7\frac{\pi}{6},\ 5\frac{\pi}{4},\ 4\frac{\pi}{3},\ 3\frac{\pi}{2},\ 5\frac{\pi}{3},\ 7\frac{\pi}{4},\ 11\frac{\pi}{6},\ 2\pi.$$

(b) Construa uma tabela que contenha os valores de seno, cosseno e tangente dos ângulos abaixo.

$$0,\ \frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2},\ 2\frac{\pi}{3},\ 3\frac{\pi}{4},\ 5\frac{\pi}{6},\ \pi,\ 3\frac{\pi}{2},\ 2\pi.$$

(9) Esboce o gráfico de $\sin(2\theta)$, $\cos(2\theta)$ e $3\cos(2\theta)$.

(10) Sendo $x = 3\sin\theta$, calcule $y = \sqrt{9 - x^2}$.

(11) Mostre que a função

$$y = f(x) = \frac{x+2}{2x-1}$$

satisfaz $f(f(x)) = x$ ou $x = f(y)$.

[Isto significa que a função f concide com a a sua inversa f^{-1}.]

(12) Se f é periódica de período T, mostre que $3T$ também é um período de f.

(13) Encontre um período para a função $f(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$.

Bom Estudo!