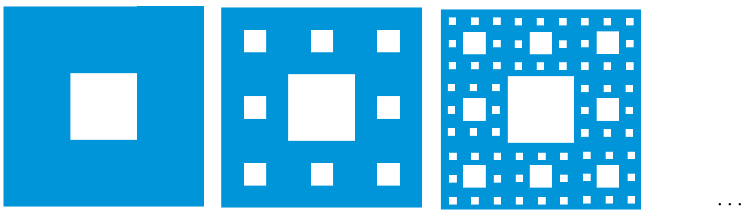
UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Quarta Lista de Exercícios de Cálculo II - MTM123

Prof. Júlio César do Espírito Santo

09 de outubro de 2018

(1) *(O Carpete de Sierpinski)* é construído a partir do quadrado $[0,1] \times [0,1]$. O procedimento é remover do quadrado anterior, o quadrado central equivalente a um nono deste e destacar os oito nonos restantes. No passo seguinte, repete-se o procedimento anterior em cada um dos oito nonos restantes do quadrado do passo anterior. Repetindo-se indefinidamente este procedimento (Ver figura) obtemos o conjunto conhecido como *Carpete de Sierpinski*. Mostre que neste conjunto a soma das áreas dos quadrados removidos é 1.



(2) Encontre o raio e o intervalo de convergência das seguintes séries de potências.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+2}{3^n} x^n$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{n} x^n$

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-3)^n}{\sqrt{n+1}} x^n$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n!(2x-1)^n$

(f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{(\ln n)^n}$

(3) *(O Conjunto de Cantor)* Em honra ao matemático alemão Georg Cantor (1845-1918), o Conjunto de Cantor é construído como a seguir. Partinmos do intervalo $[0,1]$ e, num primeiro instante, removemos o intervalo aberto $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ correspondente ao seu terço médio. Isto nos leva a dois subintervalos disjuntos, $[0, \frac{1}{3}]$ e $[\frac{2}{3}, 1]$. Num segundo instante, de cada destes dois subintervalos restantes, removemos seu terço médio aberto. Quatro intervalos permanecem e, num terceiro passo, novamente repetimos o processo. Assim, prosseguimos indefinidamente. O *Conjunto de Cantor* K consiste dos números de $[0,1]$ que permanecem após o processo descrito anteriormente. (a) Mostre que o comprimento total de todos os intervalos que foram removidos é 1. Observe que, apesar disso, K contém infinitos números. (b) Dê exemplos de alguns

destes números.

(4) (Diferenciação e Integração Termo-a-termo). Se a série de potências

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$$

tiver $R>0$ como raio de convergência, então a função definida por

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n,$$

é diferenciável (e portanto contínua) no intervalo (x_0-R, x_0+R) e, além disso, valem as expressões

$$\frac{df}{dx}(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x-x_0)^{n-1} \quad \text{e} \quad \int f(x)dx=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}+k.$$

no intervalo (x_0-R, x_0+R).

(**a**) Observando que

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{1}{(1-x)^2},$$

use a série geométrica e o Teorema de Derivação Termo-a-Termo para encontrar uma expressão em séries de potências de x para a função $f(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}$.

(**b**) Use a série geométrica e o Teorema de Integração Termo-a-Termo para encontrar uma expressão em séries de potências de x para a função $f(x)=ln(1+x)$.

(5) Nos moldes do exercício anterior, encontre uma expansão em série de potências para as funções abaixo. Indique o raio de convergência.

(a) $f(x)=\dfrac{1}{(1-x)^3}$ (b) $f(x)=arctg(x)$

(c) $f(x)=e^{-x^2}$ (d) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$

(6) Sendo a função de Bessel

$$J_0(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2},$$

use o Teorema de Derivação termo a Termo para encontrar a derivada $J_0'(x)$ da função de Bessel.

(7) Mostre que a função

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!},$$

é uma solução da equação diferencial
$$f'(x) = f(x).$$

(8) Encontre a série de Maclaurin da *Função Erro* $E(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^x e^{-t^2} dt$, muito conhecida em estatística.

(9) Encontre a Série de Taylor das funções abaixo em torno do ponto x_0 dado. [Assuma que estas funções são analíticas em x_0.]
(a) $f(x) = 1 + x + x^2, x_0 = 2$ (b) $f(x) = 3x^2 - 5x + 7, x_0 = 1$

(c) $f(x) = x^3, x_0 = 2$ (d) $f(x) = e^x, x_0 = 3$.

(10) Para as funções a seguir, encontre o Polinômio de Taylor de grau n em torno de a dado por
$$T_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i,$$
e use um *software* para plotar f e T_n na mesma tela.
(a) $f(x) = \ln x, a = 1, n = 4$ (b) $f(x) = e^x, a = 2, n = 3$

(c) $f(x) = sen(x), a = \pi/6, n = 3$ (d) $f(x) = xe^{-2x}, a = 0, n = 3$.

(11) Use a Série de Taylor da função e^x para provar que $e^x \geq 1 + x$, para todo x.

(12) As expressões $\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ e $\sinh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ definem, respectivamente, as funções cosseno hiperbólico e seno hiperbólico. Obtenha a Série de Maclaurin para estas funções. Observe que neste caso podemos aplicar o importante resultado de séries de potências que diz que *a soma de duas séries de potências é convergente no intervalo em que ambas as séries são convergentes.*

(13) Defina função analítica (real).

(14) Obter as séries de MacLaurin e os intervalos de convergência de e^{ax}, $\sin(ax)$, $\cos(ax)$, $\ln(a + x)$, $arctg(x)$, $arcsin(x)$.

(15) Obter as séries de Taylor em torno de x_0 e os intervalos de convergência de e^x, $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\ln(x)$.

Bom Estudo!