UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Quarta Lista de Exercícios de Cálculo Diferencial e Integral III - MTM124
Prof. Júlio César do Espírito Santo
22 de Janeiro de 2016

(1) Se $\delta(x, y)$ representa a densidade de área (massa por unidade de área) de um corpo (laminar) com o formato da região plana R mergulhado em um campo gravitacional, os Momentos (ou primeiros momentos) M_x e M_y deste corpo são dados por

$$M_x = \iint_R y\delta(x, y)dA \quad \text{e} \quad M_y = \iint_R x\delta(x, y)dA,$$

e estão relacionados ao equilíbrio e ao torque que este corpo exerce sobre cada eixo.

Outro conceito importante em Mecânica, que surge naturalmente no estudo da dinâmica da rotação de um corpo rígido, é o de *Momento de Inércia*(ou segundos momentos). Este conceito mede a resposta de um corpo ao esforço de girá-lo ou parar sua rotação. Por exemplo quando alguém tenta girar ou parar um Carrossel (ou a roleta do programa de auditório apresentado por Sílvio Santos conhecido por *Roda a Roda*). O momento de inércia é análogo a massa de um corpo que mede a resposta de um corpo a um esforço de ser parado ou acelerado em um movimento retilíneo. Por exemplo quando alguém tenta acelerar ou parar uma locomotiva.

O que faz uma locomotiva ser difícil de ser parada ou acelerada em um movimento retilíneo é sua massa e o que faz um carrossel ser difícil de ser acelerado ou parado é seu momento de inércia.

A questão é que o momento de inércia depende, não somente da massa do objeto, mas também de seu formato e da distribuição de massa neste objeto (densidade).

Para calcularmos o momento de inércia de de uma placa fina com densidade de área $\delta(x, y)$ e o formato de uma região R do plano-xy em torno de um eixo L, usamos a expressão

$$I_L = \iint_R [r(x, y)]^2\delta(x, y)dA.$$

onde $r(x, y)$ é a distância de L ao ponto (x, y) da região.

(a) Use a expressão acima para explicar porque as fórmulas

$$I_x = \iint_R y^2\delta(x, y)dA \quad \text{e} \quad I_y = \iint_R x^2\delta(x, y)dA$$

representam, respectivamente, os momentos de inércia em torno do eixo-x e ao eixo-y.

(b) Explique porque o momento de inércia I_0 calculado através da expressão

$$I_0 = I_x + I_y$$

é chamado de momento de inércia polar.

(2) Encontre o centro de massa e o momento de inércia em relação ao eixo-x de uma placa fina limitada pelas curvas $x = y^2$ e $x = 2y - y^2$ se a densidade no ponto (x, y) for $\delta(x, y) = 1 + y$.

(3) Seja uma placa, bem fina, com a forma de um quadrado R com vértices sobre a origem e sobre o ponto (a, a). Se sua densidade δ é dada por $\delta(x, y) = x + y$, calcule a massa total e o centro de massa da placa.
$R.M = a^3$ *e* $x = y = 7a/12$

(4) Sendo a densidade constante, calcule o momento de inércia I_x da lâmina triangular limitada pela reta $x + y = a$ e os eixos $x = 0$ e $y = 0$.
`R.`$1/6Ma^2$`, onde `M` é a massa da placa.`

(5) As integrais múltiplas impróprias são discutidas em um curso de Cálculo Avançado. Entretanto, se soubermos que

$$\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} f(x, y)dxdy := \lim_{h \to +\infty} \int_0^h \int_0^h f(x, y)dxdy,$$

use a expressão acima para demonstrar que

$$\int_0^{+\infty} \exp(-x^2)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

fazendo o seguinte:

(a) Mostre que a integral dupla

$$\iint_R \exp(-x^2 - y^2)dA = \frac{\pi}{4}(1 - e^{-a^2})$$

onde R é a região no primeiro quadrante limitada pela cinfunferencia $x^2 + y^2 = a^2$;

(b) Em seguida demonstre que $\iint_R \exp(-x^2 - y^2)dA = \left[\int_0^a \exp(-x^2)dx\right]^2$;

(c) Como $\left[\int_0^{+\infty} \exp(-x^2)dx\right]^2 = \lim_{a \to +\infty} \left[\int_0^a \exp(-x^2)dx\right]^2$, use o item (a) para obter o resultado desejado.

Bom Estudo!