UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Quarta Lista de Exercícios de Introdução às EDO's - MTM125

Prof. Júlio César do Espírito Santo

23 de Janeiro de 2018

(1) Resolva a Equação diferencial dada através de uma série de potencias em torno do ponto x_0 dado. Encontre a relação de recorrência e também os quatro primeiros termos em cada uma das duas soluções linearmente independentes (a menos que a série termine antes). Use o aplicativo Geogebra (geogebra.org) ou qualquer outro para plotar o gráfico das quatro primeiras somas parciais destas séries.

(a) $y' - y = 0$, em torno de $x_0 = 0$.
(b) $y' - xy = 0$, em torno de $x_0 = 0$.
(c) $y'' - y = 0$, em torno de $x_0 = 0$.
(d) $y'' - xy' - y = 0$, em torno de $x_0 = 0$.
(e) $y'' - xy' - y = 0$, em torno de $x_0 = 1$.
(f) $(1-x)y'' + y = 0$, em torno de $x_0 = 0$.
(g) $(4-x^2)y'' + 2y = 0$, em torno de $x_0 = 0$.
(h) $(1-x)y'' + xy' - y = 0$, em torno de $x_0 = 0$.

R. Ver [1] pag 379. [

(2) Seja λ uma constante. Resolva a *Equação de Hermite*

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0; \qquad -\infty < x < +\infty,$$

por meio de uma série de potências em torno de $x_0 = 0$. Mostre que a relação de recorrência é $a_{n+2} = \dfrac{(2n-\lambda)a_n}{(n+2)(n+1)}; n \geq 1$ e que a solução é dada por

$$y(x) = a_0\left[1 - \tfrac{\lambda}{2!}x^2 - \tfrac{(4-\lambda)\lambda}{4!}x^4 - \tfrac{(8-\lambda)(4-\lambda)\lambda}{6!}x^6 + ...\right] + a_1\left[x + \tfrac{(2-\lambda)}{3!}x^3 + \tfrac{(6-\lambda)(2-\lambda)}{5!}x^5 + \tfrac{(10-\lambda)(6-\lambda)(2-\lambda)}{7!}x^7 + ...\right].$$

Mostre também que se λ é inteiro par, não negativo uma ou outra das séries acima termina, fornecendo uma solução polinomial para a equação de Hermite.

(3) Considere $\alpha > -1$. Obtenha a solução em série de potencias em torno de $x_0 = 0$ para a *Equação de Legendre*

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y = 0.$$

Mostre que, se α for zero ou um inteiro positivo par $2n$, a solução em série de y_1 se reduz a um polinômio de grau $2n$ contendo apenas potencias pares de x. Encontre os primeiros polinômios correspondentes a $\alpha = 0, 2$ e 4. Mostre que, se α for um inteiro positivo ímpar $2n+1$, a solução em série de y_2 se reduz a um polinômio de grau $2n+1$ contendo apenas potencias ímpares de x. Encontre os primeiros polinômios correspondentes a $\alpha = 1, 3$ e 5. O *Polinômio de Legendre* $P_n(x)$ é definido como a solução polinomial da equação de Legendre com $\alpha = n$ que satisfaz $P_n(1) = 1$. Usando o que já foi calculado, encontre os polinômios de Legendre $P_0(x), P_1(x), ..., P_5(x)$. Plote no aplicativo Geogebra (geogebra.org) os gráficos destes polinômios de Legendre para $-1 \leq x \leq 1$.

Bom Estudo!

Referências

[1] W. E. Boyce & R. C. DiPrima -*Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno* - 7ed LTC 2002