UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Curso de Matemática - Bacharelado

Quarta Lista de Exercícios de Introdução aos Espaços Métricos - MTM251
Prof. Júlio César do Espírito Santo

11 de Fevereiro de 2017

(0) Faça um resumo de toda a matéria até agora dada, com definições, proposições, exemplos e contra exemplos importantes.

(1) Seja X um conjunto não vazio.
(a) Mostre que são topologias sobre X, a topologia caótica (tambem chamada trivial ou indiscreta) $\tau_{\mathcal{F}} = \{\emptyset, X\}$, a topologia discreta $\mathcal{P}(X) = \{V/V \subset X\}$ e a topologia do completmentar finito $\tau = \{U \subset X/X - U$ é finito ou $X - U = X\}$.

(b) Se $X = \{a, b, c\}$, verifique se são topologias:

$$\tau_1 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}\},$$

$$\tau_2 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$$

e

$$\tau_3 = \{\emptyset, X, \{a, b\}, \{b, c\}\}$$

são topologias sobre X.

(c) Entre τ_1, τ_2 e τ_3, do item anterior que são topologias, qual delas é mais fina?

(d) Seja X um conjunto infinito. Mostre que a coleção de subconjuntos

$$\tau_c = \{U \subset X/X - U \text{ é enumerável ou } X\}$$

é uma topologia sobre X.

(e) Verifique se

$$\tau_\infty = \{U \subset X/X - U \text{ é infinito ou } X \text{ ou vazio } \}$$

é uma topologia sobre X.

(2) Mostre que um Conjunto X ser homeomorfo a um conjunto Y é uma relação de equivalência no universo de todos os espaços topológicos.

(3) Mostre que todo Espaço Topológico metrizável é um Espaço de Hausdorff.

(4) Sejam M e N Espaços Métricos. a diagonal $\Delta = \{(x, y) \in M \times N/x = y\}$ é um subconjunto fechado de $M \times N$.

(5) Mostre que (a) Se M é um espaço métrico com apenas um ponto, então M é conexo. (b) Se um espaço métrico M é enumerável, então toda componente conexa de M reduz-se a um ponto. (c) $\mathbb{R}$ é um espaço conexo.

(6) Mostre que: (a) $X \cap \partial X = \emptyset \Leftrightarrow X$ é aberto. (b) $\partial X \subset X \Leftrightarrow X$ é fechado. (c) X é denso em $\overline{X}$.

(7) Enuncie o Teorema do Ponto fixo de Brouwer. Prove-o no caso $n = 1$.

(8) Mostre que se $X \subset Y \subset \overline{X}$ e X é conexo, então Y é conexo.

(9) Conexidade é um invariante topológico.

(10) O espaço $\mathbb{R}^2 - \mathbb{Q}^2$ é conexo por caminhos.

(11) Um espaço métrico M chama-se variedade topológica de dimensão n quando, para todo $x \in M$ existe um aberto $U \ni x$ homeomorfo a um subconjunto do espaço $\mathbb{R}^n$. Mostre que a esfera Σ^n é uma variedade topológica de dimensão n.

(12) Se $X \subset M$, então $\overline{X} = X \cup X'$, onde X' é o conjunto dos pontos de acumulação de X.

(13) Sejam A e B um subconjuntos de um espaço métrico M. Prove que:

(a) O interior de A é o maior aberto contido A. Isto é

$$\text{int}A = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$$

onde A_λ são abertos contidos em A.

(b) O fecho de B é o menor fechado contendo B. Isto é

$$\overline{B} = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$$

onde B_λ são fechados contendo em B.

(14) $\text{int}A = \emptyset \Leftrightarrow \overline{M - A} = M$.

(15) Se $X, Y \subset M$, então (a) $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$, (b) $\overline{X \cap Y} \subset \overline{X} \cap \overline{Y}$.

(16) Mostre que se $X \subset Y$, então (a) $\overline{X} \subset \overline{Y}$, (b) $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$, (c) $\overline{\emptyset} = \emptyset$.

(17) Mostre que se $X \subset M$ e $Y \subset N$, então $\overline{X \times Y} = \overline{X} \times \overline{Y}$ em $M \times N$.

(18) SeX é denso em um espaço métrico M e $f : M \to N$ é uma aplicação continua sobre o espaço métrico N. Então o conjunto imagem $f(X)$ é denso em N.

(19) Sejam M e N espaços Métricos. Mostre que:
(a) $f : M \to N$ é continua se, e somente se, para todo $X \subset M$ tem-se $f(\overline{X}) \subset \overline{f(X)}$.

(b) $f : M \to N$ é continua se, e somente se, para todo fechado $F \subset N$ tem-se $f^{-1}(F)$ fechado em M.

(20) De exemplo de un conjunto conexo que não seja conexo por caminhos.

(+) Faça também os seguintes exercícios do Livro: Espaços Métricos - Elon Lages Lima - Projeto Euclides 3a Edição: 6 página 80; 35 página 83; 56 pagina 87; 63 página 88; 74 página 89; 10 página 109; 11 página 110; 26 e 27 página 111; 47 e 49 página 114; 35,36,37 e 40 página 112.

Bom Estudo!