UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Curso de Matemática - Bacharelado

Quarta Lista de Exercícios de Análise III - MTM228

Prof. Júlio César do Espírito Santo

18 de Maio de 2016

(1) Mostre que se X é um espaço vetorial real n-dimensional, então X é linearmente isomorfo a $\mathbb{R}^n$.

(2) Seja X um espaço vetorial real n-dimensional. O conjunto $\mathrm{L} = L(X,X)$ com a composição de transformações lineares é uma Álgebra associativa, não-comutativa, com divisores de zero.

O subconjunto dos elementos de L que são invertíveis é um *grupo*, o famoso $GL(n,\mathbb{R})$.

As *projeções*, são por definição, aplicações lineares $P:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que satisfazem $P^2 = P$. Com relação ao espaço X, podemos escrever que $X = \ker(P) \oplus \mathrm{Im}(P)$. De maneira geral, se M,N são subespaços do espaço X, tais que $X = M \oplus N$, existe projeção P tal que $M = \ker(P)$ e $N = \mathrm{Im}(P)$.

(3) Toda aplicação linear aberta $T:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é sobrejetora.

(4) Se X e Y são espaços vetoriais reais de dimensão finita, dado (x,y) no espaço produto $X \times Y$, verifique que

$$\begin{aligned} ||(x,y)||_1 &= ||x|| + ||y|| \\ ||(x,y)||_2 &= \sqrt{||x||^2 + ||y||^2} \\ ||(x,y)||_\infty &= \max\{||x||, ||y||\} \end{aligned}$$

são normas no espaço produto acima. São estas normas equivalentes?

(5) Considere a norma da soma no espaço $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$. Dada uma aplicação bilinear $B : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, e fixadas as normas em $\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^p$, a imagem por B da esfera unitária em $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ é um conjunto limitado em $\mathbb{R}^p$.

Utilizando para cada aplicação bilinear $B \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^p)$, escrevendo

$$||B|| = \sup\{||B(x,y)|| \ / \ ||(x,y)|| = 1\},$$

a aplicação $B \mapsto ||B||$ é uma norma no espaço vetorial $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^p)$. Temos ainda

$$||B(x,y)|| \leq ||B|| \ ||x|| \ ||y||,$$

para todo $B \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^p)$. Conclua que toda aplicação bilinear é contínua.

(6) (Imersões Isométricas) Definimos uma imersão isométrica por uma aplicação $f : X \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ que preserva distâncias, isto é, que cumpre $||f(x) - f(y)|| = ||x - y||$ para quaisquer $x, y \in X$. Podemos afirmar que uma imersão isométrica é sempre uma aplicação contínua e injetiva.

Quando $f : X \to \mathbb{R}^n$ é uma imersão isométrica, com $f(X) = Y$, dizemos que f é uma *isometria sobre* Y. Supondo que f é uma isometria de $X \subset \mathbb{R}^m$ sobre $Y \subset \mathbb{R}^n$, então a inversa f^{-1} é uma isometria de Y sobre X. Podemos afirmar que uma transformação linear $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ é uma isometria se, e somente se, é *ortogonal*, ou seja,

$$< Ax, Ay > = < x, y >,$$

para $x, y \in \mathbb{R}^m$.

(7) O operador de adjunção $^* : L(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n) \to L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ é uma isometria de $L(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$ sobre $L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$.

(8) A aplicação linear $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é aplicação linear injetiva se, e somente se, sua adjunta A^* é uma aplicação linear sobrejetiva.

(9) Este curso é fortemente baseado em exercícios. Faça todos os exercícios indicados. Troque ideias com seus colegas, ajude-os e aprenda a partir deles.

Bom Descanso!