

UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Quinta Lista de Exercícios de Cálculo Diferencial e Integral III - MTM124
 Prof. Júlio César do Espírito Santo

06 de junho de 2016

- (1) Calcule o volume do sólido no interior do cilindro $x^2 + y^2 - ax = 0$ delimitado pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Desenhe.
- (2) Esboce o campo de vetores $\mathbf{F}(x, y, z)$ em cada um dos itens abaixo.
- (a) $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$ (b) $\mathbf{F}(x, y) = -x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$
 (c) $\mathbf{F}(x, y) = 2x\mathbf{i} + 3y\mathbf{j}$ (d) $\mathbf{F}(x, y) = 3\mathbf{i} + x\mathbf{j}$
 (e) $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 + y^2)^{-1/2}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j})$ (f) $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + z\mathbf{k}$
 (g) $\mathbf{F}(x, y, z) = -x\mathbf{i} - y\mathbf{j} - z\mathbf{k}$ (h) $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$
 (i) $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ (j) $\mathbf{F}(x, y, z) = 2\mathbf{k}$
- (3) Se $\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{c}{\|\mathbf{r}\|^2}\mathbf{u}$, onde c é uma constante e $\mathbf{u} = (1/\|\mathbf{r}\|)\mathbf{r}$ é um vetor unitário tendo a mesma direção que o vetor de posição \mathbf{r} , verifique que $\mathbf{F}(x, y, z) = \nabla(-c/\|\mathbf{r}\|)$.

- (4) Sendo g , M e m constantes, \mathbf{u} e \mathbf{r} com na questão anterior, encontre uma função potencial para

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -\frac{gMm}{\|\mathbf{r}\|^2}\mathbf{u}.$$

- (5) Encontre um campo conservativo que tenha o seguinte potencial
- (a) $f(x, y, z) = x^2 - 3y^2 + 4z^2$ (b) $f(x, y, z) = \text{sen}(x^2 + y^2 + z^2)$
 (c) $f(x, y, z) = \text{arctg}(xy)$ (d) $f(x, y, z) = y^2 e^{-3x}$
- (6) Nos itens abaixo, calcule $\nabla \times \mathbf{F}$ e $\nabla \cdot \mathbf{F}$.
- (a) $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2 z\mathbf{i} + y^2 x\mathbf{j} + (y - 2z)\mathbf{k}$ (b) $\mathbf{F}(x, y, z) = (3x + y)\mathbf{i} + xy^2 z\mathbf{j} + xz^2\mathbf{k}$
 (c) $\mathbf{F}(x, y, z) = 3xyz^2\mathbf{i} + y^2 \text{sen}(z)\mathbf{j} + xe^{2z}\mathbf{k}$ (d) $\mathbf{F}(x, y, z) = x^3 \ln z\mathbf{i} + xe^{-y}\mathbf{j} - (y^2 + 2z)\mathbf{k}$
- (7) Verifique as seguintes identidades.
- (a) $\nabla \times (\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \nabla \times \mathbf{F} + \nabla \times \mathbf{G}$ (b) $\nabla \cdot (\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \nabla \cdot \mathbf{F} + \nabla \cdot \mathbf{G}$
 (c) $\nabla \times (f\mathbf{G}) = f(\nabla \times \mathbf{G}) + (\nabla f) \times \mathbf{G}$ (d) $\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{G} - (\nabla \times \mathbf{G}) \cdot \mathbf{F}$

R.4a. $\nabla f = 2xi - 6yj + 8zk$; 4b. $F(x, y, z) = 2\cos(x^2 + y^2 + z^2)(xi + yj + zk)$; 4c. $(1 + x^2 y^2)^{-1}(yi + xj)$; 4d. $-3e^{-3x} y^2 i + 2ye^{-3x} j$; 5a. $i + x^2 j + y^2 k, 2xz + 2yx + 2$; 5c. $-y^2 \cos(z)i + (6xyz - e^{2z})j - 3xz^2 k, 3yz^2 + 2y \text{sen}(z) + 2xe^{2z}$

Bom Estudo!