UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Quinta Lista de Exercícios de Cálculo Diferencial e Integral III - MTM124

Prof. Júlio César do Espírito Santo

11 de maio de 2018

(1) Calcule o volume do sólido no interior do cilindro $x^2 + y^2 - ax = 0$ delimitado pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Desenhe.

(2) Esboce o campo de vetores $\mathbf{F}(x, y, z)$ em cada um dos itens abaixo.

(a) $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$ (b) $\mathbf{F}(x, y) = -x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$

(c) $\mathbf{F}(x, y) = 2x\mathbf{i} + 3y\mathbf{j}$ (d) $\mathbf{F}(x, y) = 3\mathbf{i} + x\mathbf{j}$

(e) $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 + y^2)^{-1/2}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j})$ (f) $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + z\mathbf{k}$

(g) $\mathbf{F}(x, y, z) = -x\mathbf{i} - y\mathbf{j} - z\mathbf{k}$ (h) $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

(i) $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ (j) $\mathbf{F}(x, y, z) = 2\mathbf{k}$

(3) Se $\mathbf{F}(x, y, z) = \dfrac{c}{||\mathbf{r}||^2}\mathbf{u}$, onde c é uma constante e $\mathbf{u} = (1/||\mathbf{r}||)\mathbf{r}$ é um vetor unitário tendo a mesma direção que o vetor de posição $\mathbf{r}$, verifique que $\mathbf{F}(x, y, z) = \nabla(-c/||\mathbf{r}||)$.

(4) Sendo g, M e m constantes, $\mathbf{u}$ e $\mathbf{r}$ com na questão anterior, encontre uma função potencial para

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -\frac{gMm}{||\mathbf{r}||^2}\mathbf{u}.$$

(5) Encontre um campo conservativo que tenha o seguinte potencial

(a) $f(x, y, z) = x^2 - 3y^2 + 4z^2$ (b) $f(x, y, z) = \operatorname{sen}(x^2 + y^2 + z^2)$

(c) $f(x, y, z) = arctg(xy)$ (d) $f(x, y, z) = y^2e^{-3x}$

(6) Nos items abaixo, calcule $\nabla \times \mathbf{F}$ e $\nabla \cdot \mathbf{F}$.

(a) $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2z\mathbf{i} + y^2x\mathbf{j} + (y - 2z)\mathbf{k}$ (b) $\mathbf{F}(x, y, z) = (3x + y)\mathbf{i} + xy^2z\mathbf{j} + xz^2\mathbf{k}$

(c) $\mathbf{F}(x, y, z) = 3xyz^2\mathbf{i} + y^2 \operatorname{sen}(z)\mathbf{j} + xe^{2z}\mathbf{k}$ (d) $\mathbf{F}(x, y, z) = x^3 \ln z\mathbf{i} + xe^{-y}\mathbf{j} - (y^2 + 2z)\mathbf{k}$

(7) Verifique as seguintes identidades. Indique quando a operação for impossível.

(a) $\nabla \times (\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \nabla \times \mathbf{F} + \nabla \times \mathbf{G}$ (b) $\nabla \cdot (\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \nabla \cdot \mathbf{F} + \nabla \cdot \mathbf{G}$

(c) $\nabla \times (f\mathbf{G}) = f(\nabla \times \mathbf{G}) + (\nabla f) \times \mathbf{G}$ (d) $\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{G} - (\nabla \times \mathbf{G}) \cdot \mathbf{F}$

(e) $\nabla(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \nabla \times \mathbf{F} + \nabla \times \mathbf{G}$ (f) $\nabla \cdot (f + g) = \nabla f + \nabla g$

(g) $\nabla \times (\nabla f\mathbf{G}) = f(\nabla \times \mathbf{G}) + (\nabla f) \times \mathbf{G}$ (h) $\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{G} - (\nabla \times (\nabla\mathbf{G})) \cdot \mathbf{F}$

R.$4a. \nabla f = 2xi - 6yj + 8zk; 4b. F(x, y, z) = 2cos(x^2 + y^2 + z^2)(xi + yj + zk); 4c. (1 + x^2y^2)^{-1}(yi + xj); 4d. -3e^{-3x}y^2i + 2ye^{-3x}j; 5a. i + x^2j + y^2k, 2xz + 2yx + 2; 5c. -y^2 \cos(z)i + (6xyz - e^{2z})j - 3xz^2k, 3yz^2 + 2y \operatorname{sen}(z) + 2xe^{2z}$

(8) Complete com (V)erdadeiro ou (F)also e justifique quando falso.

( ) Todo campo conservativo é irrotacional.
( ) Todo campo vetorial é imcompressível.
( ) A divergência do gradiente de um campo escalar é um campo vetorial.
( ) O divergente de um campo vetorial é um campo vetorial.
( ) O rotacional de um campo vetorial é um campo vetorial.
( ) O gradiente de um campo escalar é um campo vetorial.
( ) O laplaciano de um campo escalar é um campo vetorial.
( ) O gradiente de fg é $f\nabla g + g\nabla f$.
( ) A divergência de $f\mathbf{G}$ é $f\nabla \cdot \mathbf{G} + \mathbf{G}\nabla f$.

Bom Estudo!