UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Quinta Lista de Exercícios de Introdução às EDO's - MTM125
Prof. Júlio César do Espírito Santo
31 de Janeiro de 2018

(1) Use a definição para encontrar a transformada de Laplace das funções nos itens (a) ao (f) e encontre a transformada inversa das funções nos demais itens.

(a) $f(t) = e^{at}$ (b) $f(t) = sen(at)$ (c) $f(t) = e^{at}sen(bt)$ (d) $f(t) = e^{at}senh(bt)$

(e) $f(t) = t^n e^{at}$ (f) $f(t) = \displaystyle\int_0^t (t-\tau)^2 \cos(2\tau)d\tau$ (g) $F(s) = \dfrac{3}{s^2+4}$ (h) $F(s) = \dfrac{4}{(s-1)^3}$

(i) $F(s) = \dfrac{2s+2}{s^2+2s+5}$ (j) $F(s) = \dfrac{1}{s^2(s^2+4)}$ (k) $F(s) = \dfrac{4}{s^4(s^2+4)}$ (l) $F(s) = \delta(s)$

(2) Use a Transformada de Laplace para obter resolver cada um dos problemas a valores iniciais,

(a) $\begin{cases} y'' - y' - 6y = 0, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = -1, \end{cases}$ (b) $\begin{cases} y'' - 4y' + 4y = 0, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 1, \end{cases}$

(c) $\begin{cases} y^{iv} - y = 0, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 0, y''(0) = 1, \\ y'''(0) = 0, \end{cases}$ (d) $\begin{cases} y'' + \omega^2 y = \cos 2t; \qquad \omega^2 \neq 4 \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 0, \end{cases}$

(3) Encontre a transformada de Laplace inversa da função dada.

(a)$F(s) = \dfrac{3!}{(s-2)^4}$ (b) $F(s) = \dfrac{e^{-2s}}{s^2+s-2}$ (c) $F(s) = \dfrac{2e^{-}2s}{s^2-1}$ (d) $F(s) = \dfrac{2e^{-2s}}{s^2-4}$

(4) Use a Transformada de Laplace para obter resolver cada um dos problemas a valores iniciais,

(a) $\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = \delta(t-y), \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 0, \end{cases}$ (b) $\begin{cases} y'' + 2y' + 3y = \text{sen}(t) + \delta(t-3\pi), \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 0, \end{cases}$

(c) $\begin{cases} y'' + 2y' + 3y = \delta(t-5) + u_{10}(t), \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1/2, \end{cases}$

(5) Prove que ao utilizarmos a transformada de Laplace no problema de valor inicial $y'' + 4y = g(t); y(0) = 3, y'(0) = -1$ obtemos a expressão

$$Y(s) = 3\frac{1}{s^2+4} - \frac{1}{2}\frac{2}{s^2+4} + \frac{1}{2}\frac{2}{s^2+4}G(s)$$

e obtenha a solução deste PVI para os casos em que (a) $g(t) = 0$; (b) $g(t) = 1$; (c) $g(t) = t$ e $g(t) = \delta(t)$.

(6) (Viga - Um problema de Valor de Contorno). Muitas estruturas são contruidas usando grandes suportes de aço ou vigas, as quais defletem ou distorcem sobre o seu próprio peso ou em decorrência de alguma força externa. Veja a figura a seguir.

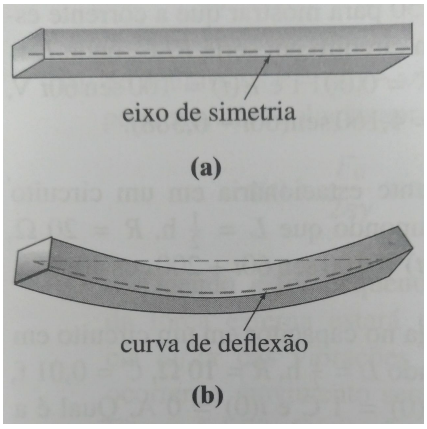

Figura 1.

Considere que o eixo-x coincida com o eixo de simetria da viga e que medimos a deflexão $y(x)$ a partir desse eixo, sendo positiva para baixo.

Da teoria da elasticidade sabe-se que o Momento fletor $M(x)$ em um ponto x ao longo da viga está relacionado à carga por unidade de comprimento $w(x)$ pela equação

$$\frac{d^2M}{dx^2} = w(x). \tag{0.1}$$

Além disso o momento fletor é proporcional a curvatura k da curva de deflexão ou curva elástica (curva que liga os centróides de todas as seções transversais). Temos,

$$M = EIk,$$

onde E e I são constantes; E é o módulo de elasticidade de Young do material de que é feita a viga e I é o momento de inércia de uma seção transversal da viga (em torno de um eixo conhecido como eixo neutro). O produto EI é chamado de rigidez defletora da viga. Agora, do cálculo, a curvatura é dada por $k = \dfrac{y''}{(1 + (y')^{3/2})}$. Para pequenas deflexões a inclinação y' é aproximada por zero, logo $M = EIy''$. Daí, considerando a segunda derivada desta expressão, e comparando com a expressão (0.1), obtemos

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = w(x).$$

As condições de contorno associadas a equação acima dependem de como as extremidades da viga estão apoiadas. Veja figura (2).

Para uma viga em balanço, a deflexão $y(x)$ deve satisfazer as seguintes condições na extremidade engastada $x = 0$:

- $y(0) = 0$, uma vez que não há deflexão; e
- $y'(0) = 0$,uma vez que a curva de deflexão é tangente ao eixo-x.

Em $x = L$, as condições da extremidade livre são:

- $y''(L) = 0$, uma vez que o momento fletor é zero
- $y'''(L) = 0$,uma vez que a força de cisalhamento é zero.

A função $F(x) = dM/dx = EId^3y/dx^3$ é chamada de força de cisalhamento. Se a extremidade de uma viga estiver simplesmente apoiada ou articulada, teremos necessariamente nessa extremidade $y = 0$ e $y'' = 0$. Veja a tabela abaixo.

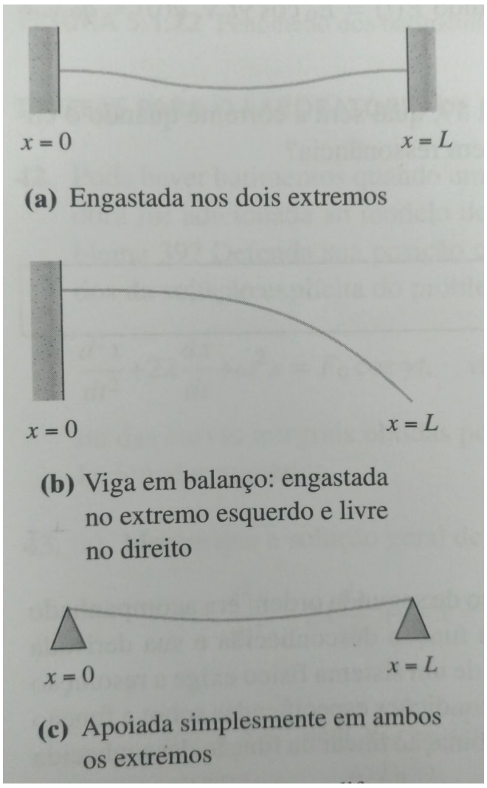

FIGURA 2.

Extremidade da viga [em $x = 0$ ou L]	**Condições de contorno**	
engastada	$y = 0$	$y' = 0$
livre	$y'' = 0$	$y''' = 0$
simplesmente apoiada ou articulada	$y = 0$	$y'' = 0$

Vamos ao exercício: Uma viga de comprimento L está engastada em ambas as extremidades. (a) Qual será a deflexão da viga se uma carga constante w_0 for uniformemente distribuída ao longo de seu comprimento, isto é, $w(x) = w_0, 0 < x < L$? (b) Plote o gráfico da curva de deflexão para o caso em que $w_0 = 24EI$ e $L = 1$.

Dica: Use transformada de Laplace para resolver $EIy^{iv} = w_0$, com as condições de contorno $y(0) = y'(0) = y(L) = y'(L) = 0$. Resposta:

$$y(x) = \frac{w_0 L^2}{24EI} x^2 (x - L)^2.$$

Bom Estudo!

REFERÊNCIAS

[1] W. E. Boyce & R. C. DiPrima -*Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno* - 7ed LTC 2002