

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO**  
**INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS**  
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**

5a. Lista de Matemática Aplicada à Engenharia de Controle e Automação - MTM146  
Prof. Júlio César do Espírito Santo

29 de agosto de 2018

(1) Esboce no plano complexo o conjunto de pontos  $s = \sigma + j\omega$  que satisfazem as expressões (a)  $\sigma < 0$ , (b)  $\sigma > 0$  e (c)  $-2 \leq \omega \leq 2$ .

(2) Determine os números complexos  $z$  tais que  $z^3 = \bar{z}$ .

Resp.  $0, \pm 1, \pm j$

(3) Se  $z = (1 + j\sqrt{3})/2$ , calcule

(a)  $z^6$                       (b)  $1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^{47}$ .

Resp. 1; 0

(4) Esboce no plano complexo o conjunto de pontos  $s \in \mathbb{C}$  que satisfaçam a cada uma das expressões abaixo.

(a)  $|s - 2 + j| \leq 1$

(b)  $|2s + 3| > 4$

(c)  $\text{Im}(s) > 1$

(d)  $|\text{Im}(s)| > 1$

(e)  $|s| > 0, 0 \leq \arg(s) \leq \pi/4$

(f)  $|s - 4| \geq |s|$

(g)  $\text{Re}(s^2) > 0$ ,

(h)  $1/2 \leq |s - 1 - j| \leq 1$ ,

(i)  $0 < |s - s_0| < \delta$ , onde  $s_0 \in \mathbb{C}$  está fixo e  $\delta > 0$ .

(5) (R) Em um circuito puramente resistivo a tensão  $V_R(t)$  sobre o resistor é indicada abaixo. Encontre a expressão senoidal para a corrente sobre o resistor  $R$ , se a resistência  $R$  é de  $10\Omega$ . Esboce o diagrama de corrente e tensão no domínio do tempo e explique a relação de fase entre a tensão e a corrente no resistor. (a)  $V_R(t) = 100 \text{sen}(377t)$  (b)  $V_R(t) = 25 \text{sen}(377t + 60^\circ)$

(L) Em um circuito puramente indutivo a corrente  $I_L(t)$  sobre o indutor de  $0,1$  Henry é indicada abaixo. Encontre a expressão senoidal para a tensão sobre o indutor. Esboce o diagrama de corrente e tensão no domínio do tempo e explique a relação de fase entre a tensão e a corrente no indutor. (c)  $I_L(t) = 10 \text{sen}(377t)$   
(d)  $I_L(t) = 7 \text{sen}(377t - 70^\circ)$

(C) Em um circuito puramente capacitivo a corrente  $I_C(t)$  sobre o capacitor de  $100\mu F$  é dada abaixo. Encontre a expressão senoidal para a tensão sobre o capacitor. Esboce o diagrama de corrente e tensão no domínio do tempo. Explique a relação de fase entre a tensão e a corrente no capacitor. (e)  $I_C(t) = 40 \text{sen}(500t + 60^\circ)$

Resp. a.  $10 \text{sen}(377t)$  b.  $2,5 \text{sen}(377t + 60^\circ)$ , c.  $377 \text{sen}(377t + 90^\circ)$ , d.  $263,9 \text{sen}(377t + 20^\circ)$ , e.  $800 \text{sen}(500t - 30^\circ)$

- (6) No contexto da análise de circuitos em corrente alternada, quando é preciso operar com quantidades senoidais em determinada frequência como

$$I(t) = i_m \text{sen}(\omega t + \theta),$$

comumente usamos a álgebra dos números complexos e a notação

$$\mathbf{I}(t) = i_{rms} \angle + \theta,$$

onde  $i_{rms} = i_m/\sqrt{2}$ . Este raio vetor, tendo uma magnitude (ou módulo)  $i_{rms}$  constante com a extremidade inicial fixada a origem é chamado *Fasor* quando aplicado a circuitos elétricos.

Converta as expressões abaixo do domínio do tempo para o domínio dos fasores.

- (a)  $50\sqrt{2}\text{sen}(\omega t)$ ,      (b)  $69,6 \text{sen}(\omega t + 72^\circ)$ ,      (c)  $45 \cos(\omega t)$ .

Resp.  $50\angle 0^\circ$ ;  $49,21\angle 72^\circ$ ;  $31,82\angle 90^\circ$ .

- (7) Converta as respostas do exercício (5) desta lista para o domínio dos fasores. Em cada caso, represente a corrente e a tensão em um diagrama fasorial e informe a velocidade angular  $\omega$  e frequência  $f$ , em Hertz.

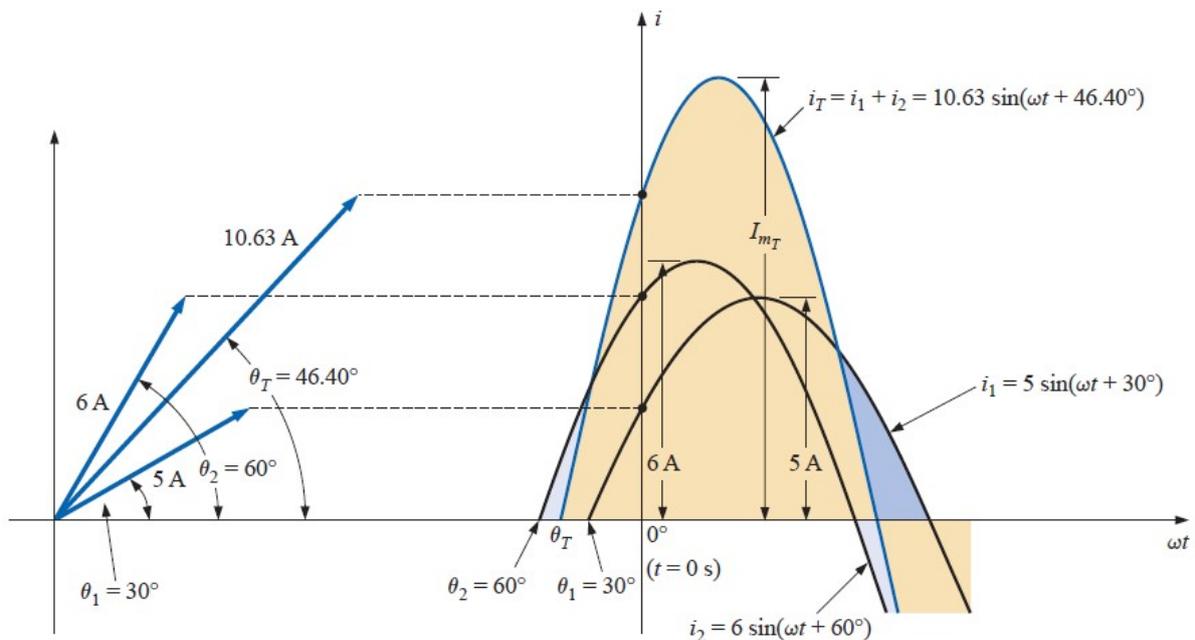
Resp. a.  $7,071\angle 0^\circ$ ;  $60\text{Hz}$ ; b.  $1,768\angle 60^\circ$ ;  $60\text{Hz}$ ; c.  $266,6\angle 90^\circ$ ;  $60\text{Hz}$ ; d.  $186,6\angle 20^\circ$ ;  $60\text{Hz}$ ; e.  $565,7\angle -30^\circ$ ;  $79,57\text{Hz}$ ;

- (8) Converta as expressões abaixo do domínio dos fasores para o domínio do tempo (Considere a frequência  $f = 60\text{Hz}$  e  $\omega = 2\pi f$ ).

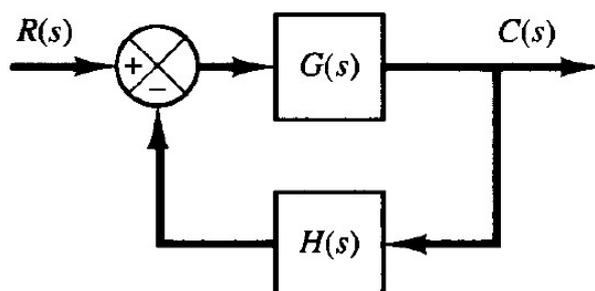
- (a)  $10\angle 30^\circ$ ,      (b)  $115\angle -70^\circ$ .

Resp.  $14,14 \text{sen}(377t + 30^\circ)$ ;  $162,6 \text{sen}(377t - 70^\circ)$ .

- (9) Usar a notação fasorial para calcular  $i_T = i_1 + i_2$ , onde  $i_1 = 5 \text{sen}(\omega t + 30^\circ)$  e  $i_2 = 6 \text{sen}(\omega t + 60^\circ)$ . Veja a figura.



(10) Considere o sistema de controle abaixo, cuja função de transferência de malha



fechada é

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}.$$

Em grande parte dos casos, o produto  $G(s)H(s)$  é escrito como uma função racional que envolve um parâmetro de ganho  $K$ , isto é,

$$G(s)H(s) = \frac{K(s + z_1)(s + z_2) \cdots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)},$$

onde  $0 \leq K \leq \infty$ .

Em cada caso abaixo, use uma cruzinha  $\times$  para representar os pontos  $-p_i$ , e uma bolinha  $\circ$  para representar os pontos  $-z_i$  no plano complexo. O lugar destas raízes fornece importantes informações sobre o comportamento geral do sistema.

$$(a) \quad G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)},$$

$$(b) \quad G(s)H(s) = \frac{K(s+2)}{s^2 + 2s + 3},$$

$$(c) \quad G(s)H(s) = \frac{K(s-3)(s+2)}{(s+1)(s+1+3j)(s+1-3j)},$$

$$(d) \quad G(s)H(s) = \frac{K(s-2)}{(s^2 + 2s + 5)(s+1)}.$$

Bons estudos!