UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Curso de Matemática - Bacharelado

Quinta Lista de Exercícios de Análise III - MTM228

Prof. Júlio César do Espírito Santo

31 de Maio de 2016

(1) Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ a hélice $f(t)=(\cos t, \operatorname{sen} t, t)$. Para todo $t\in\mathbb{R}$, a reta que liga $f(t)$ à $f(t)+f''(t)$ intersecta o eixo vertical de $\mathbb{R}^3$.

(2) Seja $f:I\to\mathbb{R}^n$ um caminho diferenciável. Dados $a\in\mathbb{R}^n$ e $r>0$, a fim de que $f(t)$ pertença, para todo $t\in I$, à esfera de centro a e raio r, é necessário e suficiente que, isto ocorra para um valor $t_0\in I$ e que o vetor velocidade $f'(t)$ seja perpendicular à $f(t)-a$ para todo $t\in I$.

(3) Seja $\lambda:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ um caminho fechado diferenciável. Mostre que existe algum $t\in(a,b)$ tal que $<\lambda(t),\lambda'(t)>=0$.

(4) Sejam $f_1,f_2,\ldots,f_p:I\to\mathbb{R}^n$ caminhos diferenciáveis e $\varphi:\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m\times\ \times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ uma aplicação p-linear. Mostre que o caminho $g:(-\epsilon,\epsilon)\to\mathbb{R}^n$ definido por $g(t)=\varphi(f_1(t),f_2(t),\ldots,f_p(t))$ é diferenciável, com $g'(t)=\sum_{i=1}^{p}\varphi(f_1(t),f_2(t),\ldots,f_i'(t),\ldots,f_p(t))$. Conclua que se $f:(-\epsilon,\epsilon)\to\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ é um caminho diferenciável cuja imagem de zero seja a matriz identidade e $g:(-\epsilon,\epsilon)\to\mathbb{R}$ seja uma função dada pelo determinante $g(t)=\det[f(t)]$, então $g'(0)=\mathrm{tr}A$ (traço de A), onde $A=f'(0)$.

(5) Seja $A:I\to L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ um caminho diferenciável cujos valores são aplicações lineares de $\mathbb{R}^n$ para $\mathbb{R}^n$. Fixado $k\in\mathbb{N}$, seja $f:I\to L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ dado por $f(t)=A(t)^k$. Mostre que f é diferenciável e determine $f'(t)$ para todo $t\in I$.

(6) Para toda matriz $X\in\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, seja

$$e^X=I+X+\frac{X^2}{2!}+\frac{X^3}{3!}+\ldots+\frac{X^n}{n!}+\ldots.$$

Defina um caminho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ pondo $f(t) = e^{At}$, onde $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ é uma matriz fixada. Mostre que $f'(0) = A$.

(7) Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ uma curva plana simples (injetiva) e fechada com comprimento $L = L(\alpha)$, e seja A a área da região limitada por α. Então

$$L^2 - 4\pi A \geq 0,$$

e verifica-se a igualdade se, e somente se, α é um circulo.

(8) Sendo g uma função real sobre o círculo unitário $\mathbb{S}^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 / ||x|| = 1\}$, para a qual $g(0,1) = g(1,0) = 0$ e $g(-x) = -g(x)$, defina $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} ||x|| \cdot g\left(\dfrac{x}{||x||}\right), & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

(a) Sendo $x \in \mathbb{R}^2$ e $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $h(t) = f(tx)$, mostre que h é diferenciável.

(b) Demonstre que f só é diferenciável em $(0,0)$ quando $g = 0$. `Sugestão:` Verifique inicialmente que $df(0,0)$ devia valer 0, a partir da análise de (h,k) para $k = 0$ e depois para $h = 0$.

(9) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Demonstre que f é uma função do tipo do exercício anterior e, portanto, não é diferenciável na origem.

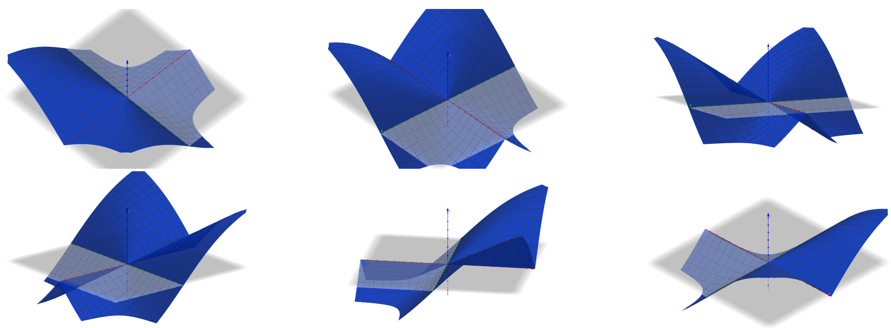

FIGURA 1. Superfície $z = f(x,y)$

Bom Descanso!