UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

6a Lista de Exercícios de Cálculo II - MTM123

Prof. Júlio César do Espírito Santo (com colaboraçao do prof. Thiago Morais)

6 de dezembro de 2018

(1) Nos problemas a seguir calcule
$$\frac{dw}{dt}$$
de duas maneiras: primeiro, usando a regra da cadeia e obtendo o resultado em função de t; em seguida substituindo e depois derivando.

(a) $w(x,y) = e^{x^2+y^2}$ $\qquad x(t) = \cos(t), \quad y(t) = \text{sen}(t).$

(b) $w(x,y,z) = xy + xz + yz$ $\qquad x(t) = 3t^2, \quad y(t) = e^t, \quad z(t) = e^{-t}.$

(c) $w(x,y) = \dfrac{3xy}{x^2 - y^2},$ $\qquad x(t) = t^2, \quad y(t) = 3t.$

(d) $w(x,y) = \ln(x^4 + 2x^2y + 3y^2),$ $\qquad x(t) = t, \quad y(t) = 2t^2.$

(e) $w(x,y) = arctg\left(\dfrac{y}{x}\right),$ $\qquad x(t) = \cos(t), \quad y(t) = \text{sen}(t).$

(2) Calcule as derivadas parciais $\dfrac{\partial w}{\partial t}$ e $\dfrac{\partial w}{\partial u}$.

(a) $w(x,y) = x^2 + y^2,$ $\qquad x = t^2 - u^2 \qquad y = 2tu.$

(b) $w(x,y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2},$ $\qquad x = t\cos u, \qquad y = t\,\text{sen}\,u.$

(3) Escreva a forma adequada da regra da cadeia para todas as possíveis derivadas das funções abaixo.

(a) $y = y(x(t))$

(b) $z = G(u(x,y), v(x,y), w(x,y))$

(c) $w = H(u(x,y,z), v(x,y,z))$

(4) Escolha dentre as opções fornecidas a forma adequada da regra da cadeia para as funções abaixo.

Função	Opções
(a) $y = f(x(t))$	(a_1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dx}\dfrac{dx}{dt}$
	(a_2) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{df}{dy}\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{df}{dx}\dfrac{dx}{dt}$
	(a_3) $\dfrac{\partial y}{\partial t} = \dfrac{\partial y}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial t}$
	(a_4) $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dy}{dx}\dfrac{dx}{dt}$
(b)$z = z(x(t), y(t))$	(b_1) $\dfrac{\partial z}{\partial t} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{dx}{dt}$, $\dfrac{\partial z}{\partial t} = \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}$
	(b_2) $\dfrac{\partial z}{\partial t} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial t} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial t}$
	(b_3) $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}$
	(b_4) $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{dz}{dx}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dz}{dy}\dfrac{dy}{dt}$

Função	Opções
(c) $z = f(x(s,t), y(s,t))$	(c_1) $\dfrac{\partial f}{\partial s} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial s} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial s}$, $\dfrac{\partial f}{\partial t} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial t} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial t}$
	(c_2) $\dfrac{df}{ds} = \dfrac{df}{dx}\dfrac{dx}{ds} + \dfrac{df}{dy}\dfrac{dy}{ds}$, $\dfrac{df}{dt} = \dfrac{df}{dx}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{df}{dy}\dfrac{dy}{dt}$
	(c_3) $\dfrac{\partial f}{\partial s} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{dx}{ds} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{dy}{ds}$, $\dfrac{\partial f}{\partial t} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}$
(d) $w = F(x(r,s,t), y(r,s,t), z(r,s,t))$	(d_1) $\dfrac{\partial w}{\partial r} = \dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial r} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial r} + \dfrac{\partial w}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial r}$, $\dfrac{\partial w}{\partial s} = \dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial s} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial s} + \dfrac{\partial w}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial s}$, $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial t} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial t} + \dfrac{\partial w}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial t}$
	(d_2) $\dfrac{dw}{dr} = \dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{dx}{\partial r} + \dfrac{dw}{dy}\dfrac{\partial y}{\partial r} + \dfrac{dw}{dz}\dfrac{\partial z}{dr}$, $\dfrac{dw}{\partial s} = \dfrac{dw}{\partial x}\dfrac{\partial x}{ds} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{dy}{\partial s} + \dfrac{\partial w}{dz}\dfrac{dz}{\partial s}$, $\dfrac{\partial w}{dt} = \dfrac{dw}{\partial x}\dfrac{dx}{\partial t} + \dfrac{\partial w}{dy}\dfrac{\partial y}{dt} + \dfrac{dw}{\partial z}\dfrac{\partial z}{dt}$
	(d_3) $\dfrac{dw}{dr} = \dfrac{dw}{dx}\dfrac{dx}{dr} + \dfrac{dw}{dy}\dfrac{dy}{dr} + \dfrac{dw}{dz}\dfrac{dz}{dr}$, $\dfrac{dw}{ds} = \dfrac{dw}{dx}\dfrac{dx}{ds} + \dfrac{dw}{dy}\dfrac{dy}{ds} + \dfrac{dw}{dz}\dfrac{dz}{ds}$, $\dfrac{dw}{dt} = \dfrac{dw}{dx}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dw}{dy}\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{dw}{dz}\dfrac{dz}{dt}$

(5) Determine os pontos críticos e classifique-os por meio do teste da segunda derivada.
Use o Geogebra3D em seu celular ou o Geogebra em seu computador para plotar cada uma das superfícies.

(a) $f(x, y) = 5x^2 - 3xy + y^2 - 15x - y + 2.$

(b) $f(x, y) = 2x^2 + xy + 3y^2 + 10x - 9y + 11.$

(c) $f(x, y) = x^5 + y^4 - 5x - 32y - 3.$

(d) $f(x, y) = x^2 + y^3 - 6xy.$

(e) $f(x, y) = x^2y + 3xy - 3x^2 - 4x + 2y.$

(f) $f(x, y) = 3xy^2 + y2 - 3x - 6y + 7.$

(g) $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy + 5.$

(h) $f(x, y) = xy(2x + 4y + 1).$

(6) Mostre que uma caixa em forma de paralelepípedo (com tampa) e volume V dado terá a menor área de superfície se for cúbica.

(7) Mostre que uma caixa em forma de paralelepípedo (com tampa) e área de superfície A dada terá o maior volume se for cúbica.

(8) Para a superfície

$$z = (2x^2 + y^2)e^{1-x^2-y^2},$$

calcule e classifique seus pontos críticos. Mostre que esta superfície se assemelha a dois picos de montanhas ligados por dois vales com uma depressão entre eles.
Plote-a em um aplicativo de celular ou um programa de computador (como por exemplo o Geogebra.)

Bom Estudo!