UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Lista Final de Exercícios de Introdução às EDO's - MTM125

Prof. Júlio César do Espírito Santo

17 de Fevereiro de 2018

(1) (a) Mostre qye $y^2 + x + 3 = 0$ é uma solução implícita para $dy/dx = -1/(2y)$ no intervalo $(0, 3)$. (b) Mostre que $xy^3(1 - \text{sen}(x)) = 1$ é uma solução implícita para

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x\cos x + \text{sen}\, x - 1)y}{3(x - x\,\text{sen}\, x)},$$

no intervalo $(0, \pi/2)$.

(2) (a) Mostre que $\phi(x) = x^2$ é uma solução explícita para $x\dfrac{dy}{dx} = 2y$, no intervalo $(-\infty, +\infty)$.

(3) Determine se a função dada é solução da equação sugerida.

(a) $x = 2\cos t - 3\,\text{sen}\, t$ e $x'' + x = 0$ (b) $x = \cos 2t$ e $\dfrac{dx}{dt} + tx = \text{sen}\, 2t$

(c) $y = 3\,\text{sen}\, 2x + e^{-x}$ e $y'' + 4y = 5e^{-x}$ (d) $y - lny = x^2 + 1$ e $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2xy}{y-1}$

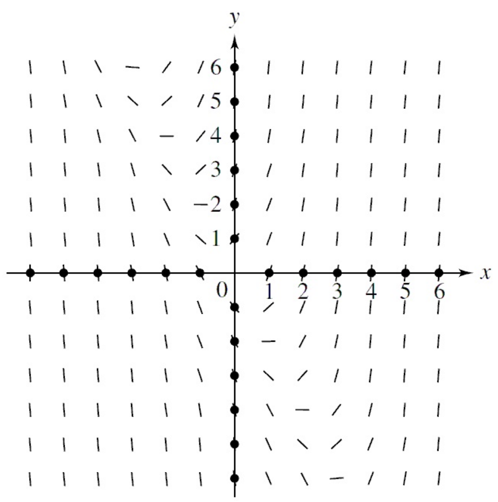
(e) $e^{xy} + y = x - 1$ e $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^{xy} - y}{e^{xy+x}}$ (f) $\text{sen}\, y + xy - x^3 = 2$ e $y'' = \dfrac{6xy' + (y')^3\,\text{sen}\, y - 2(y')^2}{3x^2 - y}$

Resp. S,N,S,S,S,S.

(4) Determine para quais valores de m a função $\phi(x) = x^m$ é uma solução para a equação dada.
(a) $3x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 11x\frac{dy}{dx} - 3y = 0$ (b) $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - 5y = 0$.

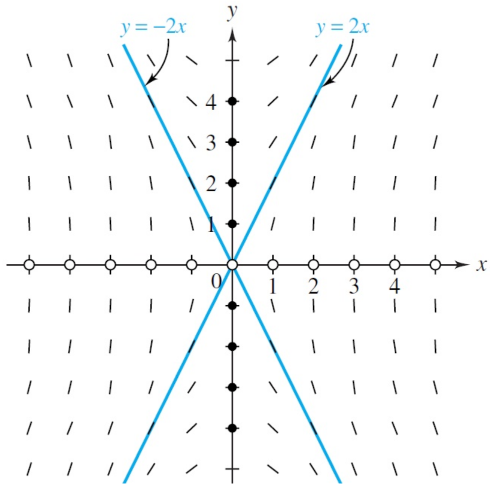
Resp. $1/3, -3; 1 \pm \sqrt{6}$

(5) O campo de direções para $\frac{dy}{dx} = 2x + y$ é mostrado na figura abaixo.



(a) Esboce a curva integral que passa através de $(0, -2)$. A partir deste esboço, escreva a equação da solução.
(b) Esboce a curva integral que passe através de $(-1, 3)$.
(c) O que acontece com a solução esboçada no item (b) quando $x \to +\infty$? E quando $x \to -\infty$?

Resp. a. reta $-2x - 2; c. +\infty, +\infty$.

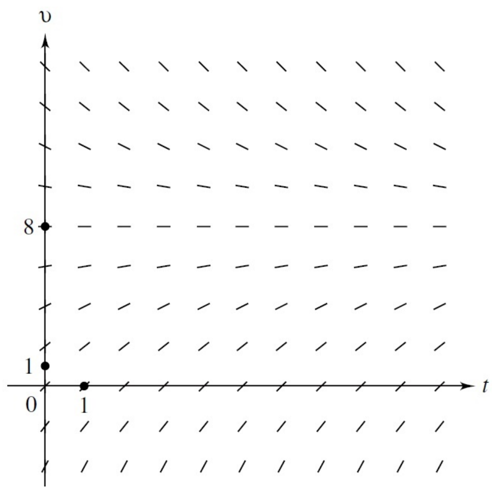


(6) O campo de direções para $dy/dx = 4x/y$ é mostrado na figura abaixo.
   (a) Verifique que as retas $y = \pm 2x$ são soluções, desde que $x \neq 0$.
   (b) Esboce a curva integral da solução da equação com condição inicial $y(0) = 2$.
   (c) Esboce a curva integral da solução da equação com condição inicial $y(2) = 1$.
   (d) O que acontece com as soluções esboçadas nos itens acima quando $x \to +\infty$? E quando $x \to -\infty$?

(7) Um modelo para a velocidade v no tempo t de um certo objeto caindo sobre influencia da gravidade em um meio viscoso é dado pela equação

$$\frac{dv}{dt} = 1 - \frac{v}{8}.$$

Do campo de direções mostrado na figura abaixo, esboce as soluções da equação considerando as condições iniciais $v(0) = 5$, $v(0) = 8$ e $v(0) = 15$. Porque o valor $v = 8$ -e chamado de "velocidade terminal´´?



(8) A equação logística para população $(\cdot 10^3)$ de uma certa espécie é dada por

$$\frac{dP}{dt} = 3P - 2P^2.$$

   (a) Esboce seu campo de direções usando o método das isóclinas e em seguida use um computador para plotar este ca
   (b) Se a população inicial é de 3000 indivíduos, isto é, $P(0) = 3$, o que podemos concluir sobre a população limite lim
   (c) Se $P(0) = 0,8$, qual a população limite?
   (d) Uma população de 2000 indivíduos pode decair para 800?

Resp. 3/2;3/2;Não.

(9) Nos itens a seguir, desenhe isóclinas e sobre elas alguns segmentos marcadores de direções e esboce algumas curvas integrais, incluindo a curva que satisfaz as condições iniciais sugeridas.
   (a) $y' = -x/y$; $y(0) = 4$, (b) $y' = 2x$; $y(0) = -1$ (c) $y' = 2x^2 - y$; $y(0) = 0$

(10) Determine se as equações diferenciais abaixo são ou não separáveis.

(a) $\dfrac{dy}{dx} - \operatorname{sen}(x+y) = 0$ (b) $\dfrac{ds}{dt} = t\ln(s^{2t}) + 8t^2$ (c) $(xy^2 + 3y^2)dy - 2xdx = 0$

Resp.N,S,S.

(11) Resolva as equações e os problemas de valor inicial a seguir.

(a) $\dfrac{dx}{dt} = 3xt^2$, (b) $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{x}{y^2\sqrt{1+x^2}}$, (c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sec^2 y}{1+x^2}$,

(d) $\dfrac{dx}{dt} - x^3 = x$, (e) $y^{-1}dy + ye^{\cos(x)}\operatorname{sen}(x)dx = 0$, (f) $y' = x^3(1-y)$; $y(0) = 3$,

(g) $\dfrac{1}{2}\dfrac{dy}{dx} = \cos(x)\sqrt{y+1}$; $y(\pi) = 0$ (h) $t^{-1}\dfrac{dy}{dt} = 2\cos^2 y$; $y(0) = \pi/4$

Resp. a.$x = Cexp(t^3)$; $b.y = [2(1+x)^{3/2} - 6(1+x)^{1/2} + C]^{1/3}$; $c.2y + \operatorname{sen} 2y = 4\operatorname{arctg} x + C$; $d.1/(C - e^{\cos x})$; $d.y = 2e^{-x^4/4} + 1$; $e.y = (\operatorname{sen}(x)+1)^2 + 1$; $f.\operatorname{arctg}(t^2+1)$

(12) Encontre a solução do Problema de valor inicial.

(a) $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y}{x} = xe^x$, $y(1) = e - 1$; (b) $t^2\dfrac{dx}{dt} + 3tx = t^4\ln t + 1$; $x(1) = 0$; (c) $\cos x\dfrac{dy}{dx} + y\operatorname{sen} x = 2x\cos^2 x$; $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{-15\sqrt{2}}{32}$

Resp. $a.y = x(e^x - 1)$; $b.y = t^3/6\ln t - t^3/36 + 1/(2t) - 17t/36$; $c.y = (x^2 - \pi^2)\cos x$

(13) **Equação de Bernoulli.** A equação

$$\frac{dy}{dx} + 2y = xy^{-2}$$

é um exemplo de uma equação de Bernoulli:

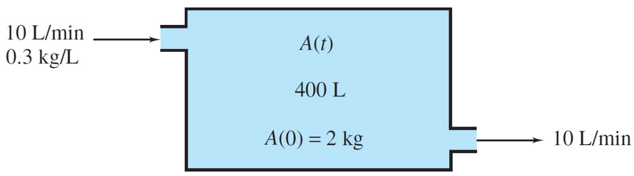
$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^{\alpha},$$

com $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$. (a) Mostre que a substituição $v = y^3$ reduz a equação acima a

$$\frac{dv}{dx} + 6v = 3x.$$

(b) Encontre a solução geral $v(x)$ da equação acima. Então, faça a substituição $v = y^3$ para obter a solução geral da equação de Bernoulli em (a).

(14) **Misturas.** Suponha que uma solução composta por 0,3 kilogramas (kg) de sal por litro (L) de água seja bombeado para um tanque inicialmente contendo 400L de água e 2 kg de sal. Sabemos que a solução entra no tanque a 10L/min e que o fluxo da mistura sai do tanque a mesma taxa. Encontre a massa de sal no tanque depois de 10 minutos. [Dica: Seja A o numero de kilogramas de sal no tanque em t minutos após o processo se iniciar e use que *a taxa de crescimento em A é igual a taxa de entrada menos a taxa da saída.*] Veja a figura.



Resp. 28kg.

(15) **Secreção de hormônios.** A secreção de hormonios no sangue é frequentemente uma atividade periódica. Se um hormônio é secretado em um ciclo de 24 horas, entao a taxa de mudança do nivel do hormonio no sangue pode ser representada pela problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \alpha - \beta\cos\dfrac{\pi t}{12} - kx \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

onde $x(t)$ é a quantidade de hormônio no sangue no tempo t, α é a a taxa média de secreção, β é a quantidade da variação diária na secreção, e k é uma constante positiva que representa a taxa na qual o corpo remove o hormônio do sangue. Se $\alpha = \beta = 1$, $k = 2$ e $x_0 = 10$, encontre $x(t)$.

Resp. $x(t) = \frac{1}{2} - \frac{2\cos(\pi t/12)}{4+(\pi t/12)^2} - \frac{(\pi/12)\,\mathrm{sen}(\pi t/12)}{4+(\pi t/12)^2} + \left(\frac{19}{2} + \frac{2}{4+(\pi t/12)^2}\right)e^{-2t}$

(16) Resolva todas as equações exatas que encontrar na lista a seguir. Se não for exata, não as resolva.

(a) $(1/y)dx - (3y - x/y^2)dy = 0$ (b) $(2x + y)dx + (x - 2y)dy = 0$

(c) $(t/y)dy + (1 + \ln y)dt = 0$ (d) $\cos\theta dr - (r\,\mathrm{sen}\,\theta - e^{\theta})d\theta = 0$

Resp. Não é exata; $x^2 + xy - y^2 = C; t\ln y + t = C; r = (C - e^{\theta})\sec\theta;$

(17) Resolva os problemas de valor inicial abaixo.

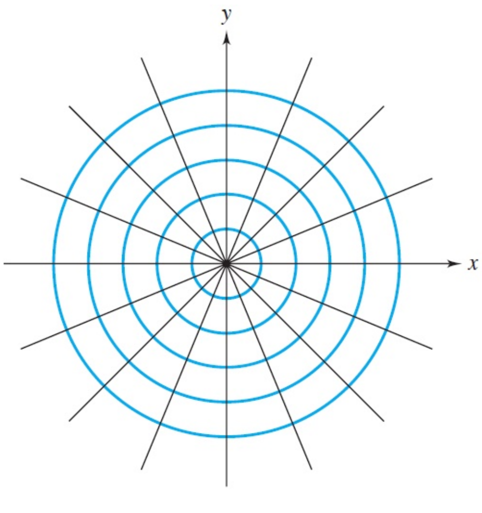
(a) $\begin{cases} (1/x + 2y^x)dx + (2yx^2 - \cos y)dy = 0 \\ y(1) = \pi, \end{cases}$ (b) $\begin{cases} (e^t y + te^t y)dt + (te^t + 2)dy = 0 \\ y(0) = -1, \end{cases}$

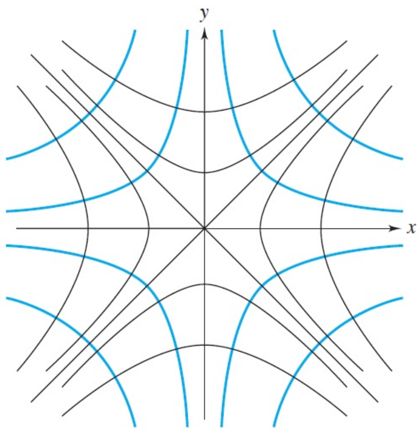
Resp. $\ln x + x^2y^2 - \mathrm{sen}\, y = \pi^2; y = \frac{-2}{te^t+2}$

(18) **Trajetórias ortogonais.** Um problema geométrico que ocorre com freqüência em engenharia é o de encontrar uma família de curvas entre si ortogonais em cada ponto. Por exemplo, sejam algumas linhas de força de um campo elétrico e desejamos encontrar a equação das curvas equipotenciais.

Encontre as trajetórias ortogonais a cada uma das famílias de curvas dadas abaixo, onde k é um parâmetro. Desenhe em um mesmo plano, como nas duas imagens abaixo, a família de curvas original e as trajetórias ortogonais a ela. Caso prefira, use o Geogebra ou um software similar para plotar os gráficos.

(a) $x^2 + y^2 = k$ (Circunferências concêntricas) (b) $xy = k$ (Hiperboles)

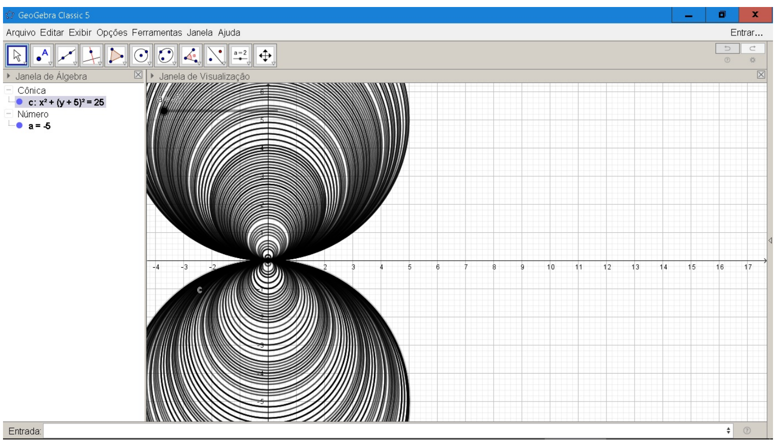




(c) $2x^2 + y^2 = k$; (d) $y = kx^4$;

(e) $y = e^{kx}$; (f) $y^2 = kx$;

(g) $x^2 + (y - k)^2 = k^2$;



Resp. Retas pela origem; $x^2-y^2=k$; $x=ky^2, x=y=0$; $x^2+4y^2=k$; $2y^2\ln y-y^2+2x^2=k$; $2x^2+y^2=k$; $(x-k)^2+y^2=k^2$.

(19) Resolva as equações abaixo. Use um fator integrante para equações exatas, se preciso.

(a) $2xydx+(y^2-3x^2)dy=0$ (b) $(x^4-x+y)d-xdy=0$
(c) $(y^2+2xy)dx-x^2dy=0$ (d) $(2y^2-6xy)dx+(3xy-4x^2)dy=0$

Resp.$\mu=y^{-4}, x^2y^{-3}-y^{-1}=C$ e $y=0$; $\mu=x^{-2}, y=x^4/3-x\ln|x|+Cx$ e $x=0$; $\mu=y^{-2}, x^2y^{-1}+x=C$ e $y=0$; $\mu=xy, x^2y^3-2x^3y^2=C$.

(20) **Riccati Equation.** Uma equação sob a forma

$$\frac{dy}{dx}=P(x)y^2+Q(x)y+R(x)$$

é chamada de equação generalizada de Riccati. (a) Se uma solução - digamos, $u(x)$ - da equação acima é conhecida, mostre que a substituição $y=u+1/v$ reduz a equação a uma equação linear na variável v. (b) Sabendo que $u(x)=x$ é uma

$$\frac{dy}{dx}=x^3(y-x)^2+y/x,$$

use (a) para encontrar todas as outras soluções desta equação.

Resp. $v'+[2Pu+Q]v=-P; y=x+5x/(C-x^5)$.

(21) **Linhas de Campo Magnético.** As linhas de campo magnético de um dipolo satisfazem

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3xy}{2x^2-y^2}.$$

Obtenha a solução geral desta equação e esboce algumas soluções particulares em um gráfico.

(22) Dentre as equações abaixo, destaque quais são de Bernoulli ou Homogêneas.

(a) $2txdx+(t^2-x^2)dt=0$ (b) $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{y}{x}=x^3y^2$ (c) $\theta dy-yd\theta=\sqrt{\theta y}\,d\theta$

Resp. $H\,e\,B$, B, $H\,e\,B$.

(23) Resolva as Equações de Bernoulli abaixo.
(a) $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{y}{x}=x^2y^2$ (b) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2y}{x}-x^2y^2$ (c) $\dfrac{dr}{d\theta}=\dfrac{r^2+2r\theta}{\theta^2}$

Resp.$y=2/(Cx-x^3)$ e $y=0$; $y=5x^2/(x^5+C)$ e $y=0$; $r=\theta^2/(C-\theta)$ e $r=0$.

(24) **Equações de Segunda Ordem.** Nos problemas a seguir, encontre a solução geral da equação diferencial ordinária dada.
(a) $y''+6y'+9y=0$ (b) $y''-y'-2y=0$ (c) $y''-5y'+6y=0$

(d) $6y''+y'-2y=0$ (e) $4y''-4y'+y=0$ (f) $4w''+20w'+25w=0$

Resp. $C_1e^{-3t}+C_2te^{-3t}$; $C_1e^{2t}+C_2e^{-t}$; $C_1e^{2t}+C_2e^{3t}$; $C_1e^{t/2}+C_2e^{-2t/3}$; $C_1e^{t/2}+C_2te^{t/2}$; $C_1e^{-5t/2}+C_2te^{-5t/2}$;

(25) Nos problemas a seguir, encontre a solução dos problemas de valor inicial.

(a) $\begin{cases} y''+2y'-8y=0 \\ y(0)=3, \\ y'(0)=-12. \end{cases}$ (b) $\begin{cases} y''-4y'-5y=0 \\ y(-1)=3, \\ y'(-1)=9. \end{cases}$ (c) $\begin{cases} y''+2y'+y=0 \\ y(0)=1, \\ y'(0)=-3. \end{cases}$

Resp. $3e^-4t$; $2e^{5(t+1)}+e^{-(t+1)}$; $e^{-t}-2te{-}t$

(26) Decida se o par de funções a seguir é Linearmente independente no intervalo $(0, 1)$ ou não.
(a) $y_1(t) = \cos t \operatorname{sen} t$ e $y_2(t) = \operatorname{sen} 2t$ (b) $y_1(t) = te^{2t}$ e $y_2(t) = e^{2t}$ (c) $y_1(t) = \operatorname{tg}^2 t - \sec^2 t$ e $y_2(t) = 3$.

Resp. LD;LI;LD.

(27) Encontre a solução geral.
(a) $y'' + y = 0$ (b) $y'' - 10y' + 26y = 0$ (c) $y'' - 4y' + 7y = 0$

(d) $y'' + 4y' + 8y = 0$ (e) $z'' + 10y' + 25z = 0$ (f) $y''' + y'' + 3y' - 5y = 0$

Resp. $C_1 \cos t + C_2 \operatorname{sen} t$; $C_1 e^{5t} \cos t + C_2 e^{5t} \operatorname{sen} t$; $C_1 e^{2t} \cos \sqrt{3}t + C_2 e^{2t} \operatorname{sen} \sqrt{3}t$; $C_1 e^{-t/2} \cos(\sqrt{5}t/2) + C_2 e^{-t/2} \operatorname{sen}(\sqrt{5}t/2$; $C_1 e^{-5t} + C_2 t e^{-5t}$; $C_1 e^t + C_2 e^{-t} \cos(2t) + C_3 e^{-t} \operatorname{sen} 2t$;

Para ver o efeito da mudança no parametro b no problema de valor inicial abaixo, $\begin{cases} y'' + by' + 4y = 0 \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$ resolva o problema para $b = 5$, $b = 4$ e $b = 2$ e esboce o gráfico das soluções.

(28) Nas equações abaixo, decida quando o método dos coeficientes a determinar poderá ser utilizado para encontrar uma solução particular da equação.
(a) $y'' + 2y' - y = t^{-1}e^t$ (b) $2y'' - 6y' + y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{e^{4x}}$

(c) $2\omega'' - 3\omega = 4x \operatorname{sen}^2 x + 4x \cos^2 x$ (d) $ty'' - y' + 2y = \operatorname{sen}(3t)$

Resp. N, S, S, N.

(29) Encontre uma solução particular para as equações abaixo.
(a) $y'' + 2y' - y = 10$ (b) $y'' + y = 2^x$

(c) $y'' - y' + 9y = 3 \operatorname{sen} 3t$ (d) $y'' - 2y' + y = 8e^t$

(e) $x''(t) - 4x'(t) + 4x(t) = te^{2t}$ (f) $y''(\theta) - 7y'(\theta) = \theta^2$

(g) $y''' - y'' + y = \operatorname{sen} t$ (h) $y''' + y'' - 2y = te^t$

(i) $y^{iv} - 3y'' - 8y = \operatorname{sen} t$

Resp. -10; $2^x[(\ln 2)^2 + 1]^{-1}$; $\cos 3t$; $4t^2 e^t$; $t^3 e^{2t}/6$; $-\theta^3/21 - \theta^2/49 - 2\theta/343$; $[\cos t + 2 \operatorname{sen} t]/5$; $e^t(t^2/10 - 4t/25)$.

(30) Um sistema massa-mola é excitado por uma força externa senoidal $g(t) = 5 \operatorname{sen} t$. A massa é igual a 1, a constante da mola é igual a 3 e o coeficiente de amortecimento é igual a 4. Se a massa está inicialmente localizada em $y(0) = 1/2$ e em repouso, isto é, $y'(0) = 0$, escreva a equação diferencial que modela este sistema e resolva-a.

Resp. $y(t) = -\cos t + (1/2) \operatorname{sen} t - (1/2)e^{-3t} + 2e^{-t}$

(31) **Speed Bumps.** Frequentemente quebra-molas como o da figura abaixo são encontrados em rodovias para desencorajar o excesso de velocidade. A figura sugere um modelo grosseiro para o movimento vertical $y(t)$ de um carro a uma velocidade V quando o mesmo encontra um quebra-molas é dado por

$$y(t) = 0, \text{ para } t \le -L/(2V) \text{ e} \tag{0.1}$$

$$my'' + ky = \begin{cases} F_0 \cos(\pi V t/L), \text{ para } |t| < L/(2V) \\ 0, \text{ para } t \ge L/(2V) \end{cases} \tag{0.2}$$

(A falta de um termo de amortecimento indica que o amortecedor do carro não está funcionando).

(a) Tomando $m = k = 1$, $L = \pi$ e $F_0 = 1$ em unidades apropriadas, resolva o problema de valor inicial, mostrando, assim, que a formula para o movimento oscilatório depois que o carro tenha atravessado o quebra molas é $y(t) = A \operatorname{sen} t$, onde A depende da velocidade V.

(b) Plote (em um aplicativo mobile ou programa de computador) o gráfico da amplitude $|A|$ da solução encontrada no exercício anterior versus a velocidade V do carro. A partir do gráfico, estime a velocidade que produz um sacolejo mais violento no veículo e seus ocupantes.

Resp. b.V é aproximadamente $0,73$.

(32) Encontre a solução geral de cada uma das equações diferenciais usando o método de Variação dos Parâmetros.
(a) $y'' + y = \sec t$ (b) $y'' + 2y' + y = e^{-t}$ (c) $y'' + 9y = \sec^2 3t$ (d) $y'' + 4y' + 4y = e^{-2t} \ln t$

Resp.$\cos t \ln|\cos t| + t \operatorname{sen} t + C_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t; t^2e^{-t}/2 + C_1e^{-t} + C_2te^{-t}; -(1/9) + (1/9)\operatorname{sen}(3t)\ln|\sec(3t) + \operatorname{tg}(3t)| + C_1\cos(3t) + C_2\operatorname{sen}(3t); (2\ln t - 3)t^2e^{-2t}/4 + C_1e^{-2t} + C_2te^{-2t}$

(33) Obtenha a solução geral da equação diferencial $y'' - y = 2t + 4$ utilizando primeiro o método dos coeficientes a determinar e em seguida o método de variação dos parâmetros. Qual deles foi mais rápido?

Resp. $y_p = -2t - 4$

(34) Encontre a solução geral das equações de Euler-Cauchy abaixo, no item (f) encontre a solução do problema de valor inicial.

(a) $t^2\dfrac{d^2y}{dt^2} + 2t\dfrac{dy}{dt} - 6y = 0; t > 0$ (b) $\dfrac{d^2w}{dt^2} + \dfrac{6}{t}\dfrac{dw}{dt} + \dfrac{4}{t^2}w = 0; t > 0$ (c) $9t^2y''(t) + a5ty'(t) + y(t) = 0; t > 0$

(d) $y''(t) - \dfrac{1}{t}y'(t) + \dfrac{5}{t^2}y(t) = 0; t < 0$ (e) $t^2y'' + 9ty' + 17y = 0; t < 0$ (f) $\begin{cases} t^2y''(t) - 4ty'(t) + 4y(t) = 0; \\ y(1) = -2, \quad y'(1) = -11. \end{cases}$

(35) Nos itens a seguir, encontre uma solução em série de potências em torno de $x = 0$ para as equações diferenciais a seguir.
(a) $y' + (x+2)y = 0$ (b) $z'' - x^2z = 0$ (c) $y'' + (x-1)y' + y = 0$

(d) $w'' - x^2w' + w = 0$ (e) $y' - 2xy = 0$ (f) $y'' - xy' + 4y = 0$

(g) $z'' - x^2z' - xz = 0$

Resp. $a.y = a_0(1 - x + (3/2)x^2 - x^3/3 + \cdots)$ $b.y = a_0(1 - x^4/12 + \cdots) + a_1(x + x^5/20 + \cdots)$ $c.y = a_0(1 - x^2/2 - x^3/6 + \cdots) + a_1(x + x^2/x - x^3/6 + \cdots)$ $d.y = a_0(1 - x^2/2 + \cdots) + a_1(x - x^3/6 + \cdots)$ $e.y = a_0(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}x^{2n})$ $f.y = a_0(1 - 2x^2 - x^4/3) + a_1[x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-3)(-1)\cdots(2n-5)}{(2n+1)!}x^{2n+1}]$ $g.y = a_{3n+2} = 0$ para $n = 0, 0, 2, \cdots$ e $a_0(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{[1\cdot4\cdot7\cdot\cdots\cdot(3n-2)]^2}{(3n)!}x^{3n}) + a_1(x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{[2\cdot5\cdot8\cdot\cdots\cdot(3n-1)]^2}{(3n+1)!}x^{3n+1})$

(36) Resolva, utilizando séries de potências em torno da origem, os problemas de valor inicial a seguir.

(a) $\begin{cases} y'' + 3xy' - y = 0; \\ y(0) = 2, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$ (b) $\begin{cases} (x+1)y''(t) - y = 0; \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1. \end{cases}$

Resp. $a.2 + x^2 - (\frac{5}{12})x^4 + (\frac{11}{72})x^6 + \cdots$ $b.x + (1/6)x^3 - (1/12)x^4 + (7/120)x^5 + \cdots$

(37) Determine a expansão em frações parciais para a função racional dada abaixo.

(a) $\dfrac{s^2 - 26s - 47}{(s-1)(s+2)(s+5)}$, (b) $\dfrac{-2s^2 - 3s - 2}{s(s+1)^2}$, (c) $\dfrac{8s - 2s^2 - 14}{(s+1)(s^2 - 2s + 5)}$, (d) $\dfrac{3s + 5}{s(s^2 + s - 6)}$, (e

(38) Use a definição para calcular as transformadas das funções abaixo.

(a) $f(t) = t$ (b) $f(t) = t^2$ (c) $f(t) = e^{6t}$ (d) $f(t) = \cos 2t$

(e) $f(t) = e^{2t}\cos 3t$ (f) $f(t) = \begin{cases} 0 & 0 < t < 2; \\ t & t \geq 2 \end{cases}$ (g) $\begin{cases} t & 0 < t < 1; \\ 1 & t \geq 1 \end{cases}$ (h) $\begin{cases} 1-t & 0 < t < 1; \\ 0 & t \geq 1 \end{cases}$

(39) Use a tabela para determinar as transformadas de Laplace. [Dica: Se preferir, use identidades trigonométricas nos itens (g), (h) e (i).]

(a) $t^{+}e^{t}\,\mathrm{sen}\,2t$ (b) $e^{-t}\cos 3t + e^{6t} - 1$ (c) $2t^2e^{-t} - t + \cos 4t$

(d) $(t-1)^4$ (e) $e^{-t}t\,\mathrm{sen}\,2t$ (f) $\cosh 5t$

(g) $\mathrm{sen}^2\,t$ (h) $\cos^3 t$ (i) $\mathrm{sen}\,2t\,\mathrm{sen}\,5t$

(40) Determine a transformada inversa de Laplace de cada uma das expressões a seguir.

(a) $\dfrac{6}{(s-1)^4}$, (b) $\dfrac{s+1}{s^2+2s+10}$, (c) $\dfrac{1}{s^2+4s+8}$, (d) $\dfrac{2s+16}{s^2+4s+13}$, (e) $\dfrac{3s-15}{2s^2-4s+10}$.

(41) Nos problemas a seguir, determine a transformada $\mathcal{L}^{-1}\{F\}$.

(a) $F(s) = \dfrac{6s^2-13s+2}{s(s-1)(s-6)}$, (b) $F(s) = \dfrac{5s^2+34s+53}{(s+3)^2(s+1)}$, (c) $F(s) = \dfrac{7s^2+23s+30}{(s-2)(s^2+2s+5)}$,

(d) $s^2F(s) - 4F(s) = \dfrac{5}{s+1}$, (e) $sF(s) + 2F(s) = \dfrac{10s^2+12s+14}{s^2-2s+2)}$.

(f) $F(s) = \dfrac{e^{-2s}}{s-1}$ (g) $F(s) = \dfrac{e^{-2s} - 3e^{-4s}}{s+2}$, (h) $F(s) = \dfrac{se^{-3s}}{s^2+4s+5}$,

(42) Use Transformadas de Laplace para resolver os Problemas de valor inicial a seguir.

(a) $\begin{cases} y'' - 2y' + 5y = 0; \\ y(0) = 2, \quad y'(0) = 4, \end{cases}$ (b) $\begin{cases} y'' + 6y' + 9y = 0; \\ y(0) = -1, \quad y'(0) = 6, \end{cases}$ (c) $\begin{cases} \omega'' + \omega = 0; \\ \omega(0) = -1, \quad \omega'(0) = -1, \end{cases}$

(d) $\begin{cases} y'' - 7y' + 10y = 0; \\ y(0) = 5, \quad y'(0) = -5, \end{cases}$ (e) $\begin{cases} y'' + 5y' - 6y = 0; \\ y(0) = 5, \quad y'(0) = -5, \end{cases}$. (f) $\begin{cases} y'' - y' - 2y = -8\cos t - 2\,\mathrm{sen}\,t; \\ y(\pi/2) = 1, \quad y'(\pi/2) = 0, \end{cases}$

(43) Calcule a transformada de Laplace.

(a) $f(t) = u_1(t)(t-1)^2$ (b) $f(t) = t^2u_2(t)$.

(c) $f(t) = t, 0 < t < 2$; e $f(t)$ seja 2-periódica. (d) $f(t) = \begin{cases} e^{-t}, & 0 < t < 1; \\ 1, & 1 < t < 2. \end{cases}$ e $f(t)$ seja 2-periódica.

(e) $f(t) = \delta(t-1) - \delta(t-3)$ (f) $f(t) = t\delta(t-1)$

(g) $f(t) = \delta(t-\pi)\,\mathrm{sen}\,t$ (h) $f(t) = e^t\delta(t-3)$

Resp.$2e^{-s}/s^3; e^{-2s}(4s^2+4s+2)/s^3; e.e^{-s} - e^{-3s}, g.0.$

(44) Resolvas os PVIs.

(a) $\begin{cases} w'' + w = \delta(t-\pi); \\ w(0) = 0; \qquad w'(0) = 0. \end{cases}$ (b) $\begin{cases} y'' + 2y' - 3y = \delta(t-1) - \delta(t-2); \\ y(0) = 2; \qquad y'(0) = -2. \end{cases}$

(c) $\begin{cases} y'' - y = 4\delta(t-1) + t^2; \\ y(0) = 0; \qquad y'(0) = 2. \end{cases}$ (d) $\begin{cases} y'' + 6y' + 5y = e^t\delta(t-1); \\ y(0) = 0; \qquad y'(0) = 4. \end{cases}$

Resp. $-u_\pi(t)\,\mathrm{sen}\,t; e^t + e^{-3t} + (u_1(t)/4)(e^{t-1} - e^{3-3t}) - (u_2(t)/4)(e^{t-2} - e^{6-3t})$; $2u_2(t)(e^{t-2} - e^{2-t}) + 2e^t - t^2 - 2; e(u_1(t)/4)(e^{1-t} - e^{5-5t}) + e^{-t} - e^{-5t}$;

(45) Use o teorema da convolução para obter uma solução para o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = g(t); \\ y(0) = -1; \qquad y'(0) = 1. \end{cases}$$

em que $g(t)$ é qualquer função seccionalmente contínua no intervalo $[0, +\infty)$ e de ordem exponencial.

Resp. $2te^t - e^t + \int_0^t e^{t-\tau}(t-\tau)g(\tau)d\tau$.

(46) Seja um sistema linear governado pelos problemas de valor inicial a segui. Encontre a função de transferencia $H(s)$ para o sistema e a função de resposta ao impulso $h(t)$. Em seguida, dê uma fórmula para a solução do problema de valor inicial.

(a) $\begin{cases} y'' + 9y = g(t); \\ y(0) = 2; \qquad y'(0) = -3. \end{cases}$ (b) $\begin{cases} y'' - y' - 6y = g(t); \\ y(0) = 1; \qquad y'(0) = 8. \end{cases}$ (c) $\begin{cases} y'' - 2y' + 5y = g(t); \\ y(0) = 0; \qquad y'(0) = 2. \end{cases}$

Resp.
$a.H(s) = (s^2+9)^{-1}, h(t) = \mathrm{sen}(3t)/3, y_k(t) = 2\cos(3t) - \mathrm{sen}(3t), y(t) = \frac{1}{3}\int_0^t \mathrm{sen}\,3(t-\tau)g(\tau)d\tau + y_k(t)$;
$b.H(s) = (s^2 - s - 6)^{-1}, h(t) = (e^{3t} - e^{-2t})/5, y_k(t) = 2e^{3t} - e^{-2t}, y(t) = \frac{1}{5}\int_0^t [e^{3(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)}]g(\tau)d\tau + y_k(t)$;
$c.H(s) = (s^2+9)^{-1}; h(t) = \mathrm{sen}(3t)/3; y_k(t) = 2\cos(3t) - \mathrm{sen}(3t), y(t) = \frac{1}{2}\int_0^t e^{t-\tau}\,\mathrm{sen}(t-\tau)g(\tau)d\tau + y_k(t)$;

(47) Use o teorema de convolução e a transformadas de Laplace para calcular $1 * 1 * 1$.

Resp. $t^2/2$.

(48) Use o teorema de convolução e a transformadas de Laplace para calcular $1 * t * t^2$.

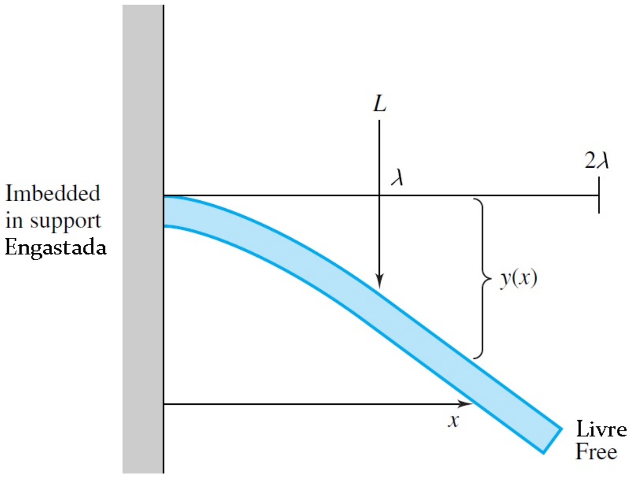
(49) A figura abaixo mostra uma viga de comprimento 2λ que está engastada em um suporte à esquerda e livre a direita. A deflexão vertical da viga à distancia x deste suporte é denotada por $y(x)$. Se a viga tem uma carga concentrada L atuando em seu centro, então a deflexão deve satisfazer o problema de valor de contorno simbólico

$$\begin{cases} EI\dfrac{d^4y}{dx^4}(x) = L\delta(x-\lambda); \\ y(0) = y'(0) = y(\lambda) = y'(\lambda) = 0, \end{cases}$$

onde o modulo de elasticidade de Young E e o momento de inércia I em torno do eixo neutro da viga são constantes. Encontre uma formula para a deflexão $y(x)$ em termos das constantes λ, L, E e I. [Dica: Faça $y''(0) = m$ e $y'''(0) = c$. Primeiro resolva o PVI com a equação de quarta ordem e depois use as condições de contorno $y''(2\lambda) = y'''(2\lambda) = 0$ para determinar m e c.]

Resp. $L[3\lambda x^2 - x^3 + (x-\lambda)^3 u\lambda(x)]/6EI$.

(50) Estude, descanse, durma bem. Esteja confiante e muito sucesso.



Bom Estudo!