**UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO**
**INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS**
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**

6a. Lista de Matemática Aplicada à Engenharia de Controle e Automação - MTM146
Prof. Júlio César do Espírito Santo

09 de abril de 2018

(1) Seja $z = x + jy$. Encontre a imagem da curva $Re(z) = 1$ que está no plano-$xy$ pela função $f(z) = z^2$ no plano-$uv$. `Resp. Parábola, passando por` $u = 1$ `e` $v = \pm 1$

(2) Mostre que $f(z) = |z|^2$ é contínua no plano complexo inteiro.

(3) Calcule o valor dos três primeiros limites abaixo e mostre que o último não existe.

(a) $\lim\limits_{z \to j} 4z^3 - 5z^2 + 4z + 1 - 5j$ (b) $\lim\limits_{s \to j} \dfrac{s^4 - 1}{s - j}$

(c) $\lim\limits_{z \to 1+j} \dfrac{z^2 - 2z + 2}{z^2 - 2i}$ (d) $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{z}{\overline{z}}$

(4) Usando as regras de derivação, onde $f$ estiver definida, encontre as derivadas das seguintes funções de variável complexa:

(a) $f(s) = 3s^4 - 5s^3 + 2s$ (b) $f(s) = (s^2 - 1)/(4s + 1)$

(c) $f(s) = (1 - 4s^2)^3$ (d) $f(s) = [(1 + s^2)^4]/4s^2$

(5) Use a definição de derivada para provar que $f'(s) = -1/s^2$ se $f(s) = 1/s$, com $s \neq 0$.

(6) Descreva a região na qual a função

$$f(z) = \frac{x}{x^2 + y^2} - j\frac{y}{x^2 + y^2}$$

é analítica. Agora faça o mesmo para a função

$$f(z) = \frac{x}{x^2 + y^2} + j\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

`Resp. Qualquer domínio que não contenha a origem; Ponto algum.`

(7) Seja $G(s)$, em que $s = \sigma + j\omega$, a função de transferência de um determinado sistema. Calcule a imagem do eixo imaginário inteiro; isto é, calcule $G(j\omega) = X + jY$, identificando as partes real $X$ e imaginária $Y$. Considere $T, L, \omega_n$ e $\zeta$ constantes reais.

(a) $G(s) = \dfrac{1}{1 + sT}$ (b) $G(s) = \dfrac{1}{Ts}$ (c) $G(s) = \dfrac{1}{s(Ts + 1)}$

(d) $G(s) = \dfrac{1}{1 + 2\zeta\left(\dfrac{s}{\omega_n}\right) + \left(\dfrac{s}{\omega_n}\right)^2}$ (e) $G(s) = e^{-sT}$ (f) $G(s) = \dfrac{e^{-sL}}{s(Ts + 1)}$

(8) Encontre as constantes reais $a, b, c$ e $d$ para que as funções a seguir sejam analíticas.

(a) $f(z) = 3x - y + 5 + j(ax + by - 3)$

(b) $f(z) = x^2 + axy + by^2 + j(cx^2 + dxy + y^2)$.

(9) Para as funções a seguir, mostre que a função $f'(z)$ não existe em ponto algum.

(a) $f(z) = \overline{z}$ (b) $f(z) = z - \overline{z}$

(c) $f(z) = 2x + jxy^2$ (d) $f(z) = e^x e^{-jy}$

(10) Mostre que a função $f(z) = x^2 - x + y + j(y^2 - 5y - x)$ não e analítica em ponto algum, mas é diferenciável sobre a curva $y - x = 2$.

(11) Verifique que as funções $u(x, y)$ a seguir são harmônicas e encontre a função harmônica conjugada $v(x, y)$ correspondente. Escreva a função analítica $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$.

(a) $u(x, y) = 2x(1 - y)$ (b) $u(x, y) = \operatorname{senh} x \operatorname{sen} y$

(c) $u(x, y) = x$ (d) $u(x, y) = x^2 - y^2$

(e) $u(x, y) = 4xy^3 - 4x^3y + x$ (f) $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$

(g) $u(x, y) = e^x(x \cos y - y \operatorname{sen} y)$ (h) $u(x, y) = 2x - 2xy$

Resp. $v(x, y) = x^2 - y^2 + 2y; v(x, y) = -\cosh x \cos y; f(z) = z; f(z) = z^2; f(z) = jz^4 + z$

(12) (a) Esboce as curvas de nível $u(x, y) = c_1$ e $v(x, y) = c_2$ relacionadas à função analítica $f(z) = z^2$.

(b) Descreva as curvas de nível de $f(z) = 1/z$.

(c) Descreva a curva de nível $v(x, y) = 0$ da função

$$f(z) = z + \frac{1}{z}.$$

(13) Esboce e identifique os gráficos das seguintes curvas em coordenadas polares.

(a) $r = 5$ (b)$\theta = -\pi/6$ (c) $r = 4\cos\theta$ (d) $r = 4(1 - \operatorname{sen}\theta)$

(e) $r = 8\cos 3\theta$ (f)$r^2 = 4\cos 2\theta$ (g) $r = 4\operatorname{cossec}\theta$ (h) $r = 2 - \cos\theta$

(i) $r = 2^\theta; \theta \geq 0$ (j)$r = -6(1 + \cos\theta)$ (k) $r = 2 + 4\operatorname{sen}\theta$ (l) $r^2 = -16(\operatorname{sen} 2\theta)$

(14) Identifique e escreva na forma polar:

(a) $x = -3$ (b) $y = x^2$ (c) $x^2 + y^2 = 4$ (d) $x^2 - y^2 = 16$.

Resp. Reta, parábola, circunferência, hipérbole.

(15) Escreva na forma polar, identifique e desenhe a curva

$$(x^2 + y^2 - 2x)^2 = x^2 + y^2.$$

Resp. Cardióide.

Bons estudos!