UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Curso de Matemática - Bacharelado

Sexta Lista de Exercícios de Análise III - MTM228

Prof. Júlio César do Espírito Santo

27 de Junho de 2016

(1) Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ um aberto. Mostre que as aplicações (a) constantes $f : U \to \mathbb{R}^n; f(x) = c$, c constante; (b) lineares $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ e bilineares $B : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ são diferenciáveis e calcule, em cada caso, sua derivada.

(2) † Defina $IP : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ por $IP(x,y) = \langle x,y \rangle$.
(a) Encontre $J(IP)(a,b)$ e $D(IP)(a,b)$.
(b) Se $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, são diferenciáveis e $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida por $h(t) = \langle f(t), g(t) \rangle$, mostre que

$$Dh(a) = \langle Df(a)^T, g(a) \rangle + \langle f(a), Dg(a)^T \rangle.$$

(Observe que Df(a) é uma matriz $n \times 1$ e sua transposta $Df(a)^T$ é $1 \times n$ a qual consideramos como membro de $\mathbb{R}^n$.)
(c) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ é differenciável e se $||f(t)|| = 1$, para todo t, mostre que $\langle Df(t)^T, f(t) \rangle = 0$
(d) Exiba uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável tal que a função $||f||$ definida por $||f||(t) = ||f(t)||$ não seja diferenciável.

(3) Calcule, se possível, a Derivada de Gâteaux de

$$\Phi(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5}{(y-x^2)^2 + x^4}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(4) Determine o conjunto dos pontos críticos de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, tal que $f(x,y) = cos(x^2 + y^2)$. Faça o mesmo para $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, tal que $g(x,y) = x^3 - y^3 - x + y$.

(5) † Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto. Se $f : U \to \mathbb{R}$ possui derivadas parciais

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : U \to \mathbb{R},$$

para $i = 1, 2, \ldots, m$ limitadas, prove que f é continua.

(6) Seja $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função contínua que tenha derivadas direcionais em todas as direções em qualquer ponto de $\mathbb{R}^m$. Se

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u) > 0,$$

para todo $u \in \mathbb{S}^{m-1}$, prove que existe $a \in \mathbb{R}^m$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = 0,$$

seja qual for $v \in \mathbb{R}^m$.

(7) Seja $f : I \times J \to \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável do retângulo aberto $I \times J \subset \mathbb{R}^2$. Se $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ é identicamente nula, provem que existem $\varphi : I \to \mathbb{R}$ e $\psi : J \to \mathbb{R}$ duas funções deriváveis tais que $f(x,y) = \varphi(x+y) + \psi(x-y)$, para todo (x,y).

(8) Seja $f : \mathbb{R}^{m+n} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = < x, x > - < y, y >$, onde $x \in \mathbb{R}^m$ e $y \in \mathbb{R}^n$. Calcule $gradf(x,y)$, obtenha a matriz Hessiana de f em (x,y) e obtenha a forma quadrática Hessiana de f em (x,y). Encontre os pontos críticos de f, e estude estes pontos críticos por meio da forma quadratica Hessiana, nos casos $m = 0, n = 0$ e $m\dot{n} = 0$.

(9) † Mostre que se $M \subset \mathbb{R}^{m+1}$ é uma superfície diferenciável, então, para cada $p \in M$, o conjunto T_pM, formado pelos vetores velocidade $\lambda'(0)$ de caminhos $\lambda : (-\epsilon, \epsilon) \to M$, diferenciáveis em $t = 0$, tais que $\lambda(0) = p$ é um subespaço vetorial de dimensão m de $\mathbb{R}^{m+1}$, chamado de `Espaço tangente à` M `em` p.

(10) † Uma função f, de Classe C^2, $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida no aberto U, chama-se *harmônica* quando

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}(x) = 0,$$

para todo $x \in U$. Prove que a matriz hessiana de uma função harmônica não pode ser definida (nem positiva nem negativa).

Bom Descanso!