

UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Sétima Lista de Exercícios de Cálculo Diferencial e Integral III - MTM124
Prof. Júlio César do Espírito Santo

05 de Fevereiro de 2016

- (1) Nos itens abaixo, calcule as integrais $\int_{\gamma} f(x, y) ds$, $\int_{\gamma} f(x, y) dx$, $\int_{\gamma} f(x, y) dy$, onde γ está definida parametricamente como indicado.
- (a) $f(x, y) = x^3 + y$; $x(t) = 3t$, $y(t) = t^3$; $0 \leq t \leq 1$
- (b) $f(x, y) = xy^{2/5}$; $x(t) = t/2$; $y(t) = t^{5/2}$; $0 \leq t \leq 1$
- (2) Nos itens a seguir calcule a integral ao longo da curva γ , nos dois sentidos de percurso.
- (a) $\int_{\gamma} 6x^2 y dx + xy dy$ onde γ é o gráfico de $y = x^3 + 1$ entre $(-1, 0)$ e $(1, 2)$
- (b) $\int_{\gamma} y dx + (x + y) dy$ onde γ é o gráfico de $y = x^2 + 2x$ entre $(0, 0)$ e $(2, 8)$
- (3) Calcule $\int_{\gamma} (x - y) dx + x dy$ onde γ é o gráfico de $y^2 = x$ de $(4, -2)$ a $(4, 2)$.
- (4) Calcule $\int_{\gamma} xy dx + x^2 y^3 dy$ onde γ é o gráfico de $y^3 = x$ de $(0, 0)$ a $(1, 1)$.
- (5) (†) Calcule $\int_{\gamma} xy dx + (x + y) dy$ para cada uma das curvas γ de $(0, 0)$ a $(1, 3)$. Esboce γ .
- (a) γ é o segmento de reta de $(0, 0)$ a $(1, 0)$ e de $(1, 0)$ a $(1, 3)$;
- (b) γ é o segmento de reta de $(0, 0)$ a $(0, 3)$ e de $(0, 3)$ a $(1, 3)$;
- (c) γ é o segmento de reta de $(0, 0)$ a $(1, 3)$;
- (d) γ é parte da parábola $y = 3x^2$ de $(0, 0)$ a $(1, 3)$.
- (6) (‡) Calcule $\int_{\gamma} (x^2 + y^2) dx + 2x dy$ para cada uma das curvas γ de $(1, 2)$ a $(-2, 8)$. Esboce γ .
- (a) γ é o segmento de reta de $(1, 2)$ a $(1, 8)$ e de $(1, 8)$ a $(2, 8)$;
- (b) γ é o segmento de reta de $(1, 2)$ a $(-2, 2)$ e de $(-2, 2)$ a $(2, 8)$;
- (c) γ é o segmento de reta de $(1, 2)$ a $(2, 8)$;
- (d) γ é parte da parábola $y = 2x^2$ de $(1, 8)$ a $(-2, 8)$.
- (7) Calcule (a) $\int_{\gamma} xz dx + (y + z) dy + x dz$, se $\gamma(t) = (e^t, e^{-t}, e^{2t})$, com $t \in [0, 1]$;
- (b) $\int_{\gamma} y dx + z dy + x dz$ se $\gamma(t) = (\sin(t), 2 \sin(t), \sin^2(t))$, com $t \in [0, \pi/2]$.

(8) Calcule

$$\int_{\gamma} (x + y + z)dx + (x - 2y + 3z)dy + (2x + y - z)dz,$$

onde γ é a curva entre $(0, 0, 0)$ e $(2, 3, 4)$ descrita abaixo.

(a) γ consiste de três segmentos de reta, sendo o primeiro paralelo ao eixo- x , o segundo paralelo ao eixo- y e o terceiro paralelo ao eixo- z ;

(b) γ consiste de três segmentos de reta, sendo o primeiro paralelo ao eixo- z , o segundo paralelo ao eixo- x e o terceiro paralelo ao eixo- y ;

(c) γ é um segmento de reta.

(9) Calcule as integrais

(a) $\int_{\gamma} (x - y)dx + (y - z)dy + xdz$, onde γ é a curva entre $(1, -2, 4)$ e $(-4, 5, 2)$ do tipo descrito nos itens (a)-(c) do exercício anterior.

(b) $\int_{\gamma} xyzds$, onde γ é o segmento de reta entre os pontos $(0, 0, 0)$ e $(1, 2, 3)$.

(10) Calcule $\int_{\gamma} (xy + z)ds$ sobre a hélice circular $x(t) = a \cos(t)$, $y(t) = a \sin(t)$, $z(t) = bt$, $t \in [0, 2\pi]$.

(11) Se um fio fino tem a forma de uma curva plana γ , e se sua densidade linear em (x, y) é $\delta(x, y)$, então os momentos com respeito aos eixos x e y são definidos por

$$M_x = \int_{\gamma} y\delta(x, y)ds \quad M_y = \int_{\gamma} x\delta(x, y)ds.$$

(a) Escreva uma expressão para as coordenadas (\bar{x}, \bar{y}) do centro de massa, em função da massa do fio e dos momentos M_x e M_y .

(b) Se um fio fino está situado em um plano coordenado tal que sua forma coincida com parte da parábola $y = 4 - x^2$ entre $(-2, 0)$ e $(2, 0)$. Encontre a massa e o centro de massa se a densidade linear no ponto (x, y) é diretamente proporcional à sua distância ao eixo- y .

(c) Calcule $\int_{\gamma} (xy + z)ds$ sobre a hélice circular

$$\begin{cases} x(t) = a \cos(t), \\ y(t) = a \sin(t), \\ z(t) = bt; \end{cases}$$

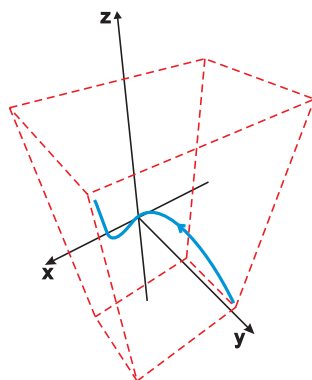
com $t \in [0, 2\pi]$.

(d) Extenda as definições para a massa e o centro de massa de um fio em tres dimensões.

(12) Um fio com densidade linear constante tem a forma de uma hélice circular $x(t) = a \cos(t)$, $y(t) = a \sin(t)$, $z(t) = bt$, $t \in [0, 3\pi]$. Encontre a massa e o centro de massa do fio.

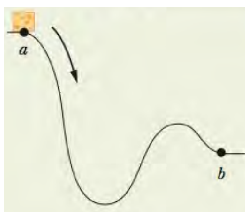
(13) Se $\mathbf{F}(x, y) = xy^2\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j}$ é um campo de forças, encontre o trabalho feito por \mathbf{F} ao longo das curvas descritas em (a)-(d) no exercício indicado por (†).

- (14) Se $\mathbf{F}(x, y) = (2x + y)\mathbf{i} + (x + 2y)\mathbf{j}$ é um campo de forças, encontre o trabalho realizado por \mathbf{F} ao longo das curvas descritas em (a)-(d) no exercício indicado por (†).
- (15) Uma força atuando em um ponto (x, y) do plano coordenado é dado por $\mathbf{F}(x, y) = (4/\|\mathbf{r}\|^3)\mathbf{r}$, onde $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$. Encontre o trabalho realizado por \mathbf{F} ao longo da parte superior da circunferência $x^2 + y^2 = a^2$ de $(-a, 0)$ a $(a, 0)$.
- (16) A força no ponto (x, y) em um plano coordenado é dado por $\mathbf{F}(x, y, z) = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$. Encontre o trabalho realizado pela força F ao longo da *twisted cubic* dada por $x(t) = t, y(t) = t^2, z(t) = t^3$, de $(0, 0, 0)$ a $(2, 4, 8)$.



Twisted cubic

- (17) Resolva o exercício anterior para $\mathbf{F}(x, y, z) = e^x\mathbf{i} + e^y\mathbf{j} + e^z\mathbf{k}$.
- (18) Se um objeto desenvolve um movimento através de um campo de forças \mathbf{F} tal que em cada ponto (x, y, z) sua velocidade é ortogonal à $\mathbf{F}(x, y, z)$. Mostre que o trabalho realizado por \mathbf{F} sobre o objeto é zero.
- (19) Caso $W = \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, seja negativo, explique o significado deste sinal.
- (20) A figura abaixo mostra um pedaço de 2,0 kg de queijo gorduroso que desliza por um trilho sem atrito do ponto a ao ponto b . O queijo percorre uma distância total de 2,0 m ao longo do trilho e uma distância vertical de 0,80 m. Qual o trabalho realizado sobre o queijo pela força gravitacional durante o deslocamento?



R.1a.14(2√2-1); 2a.34/7; 3.-16/3; 5a.15/2;5b.6;5c.7;5d.29/4; 7.1/12(3e⁴+6e⁻²-12e+8e³-5); 8.19;35;27; 9b.3√14/2; 11.(x̄,ȳ) = (0,πa/4); 13.9/2(para todos os caminhos); 15.0; 16.412/15; 20.16 J (J de Jolue.)

Bom Estudo!