UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Sétima Lista de Exercícios de Cálculo Diferencial e Integral III - MTM124

Prof. Júlio César do Espírito Santo

14 de maio de 2018

(1) Nos items abaixo, calcule as integrais $\int_\gamma f(x,y)ds$, $\int_\gamma f(x,y)dx$, $\int_\gamma f(x,y)dy$, onde γ está definida parametricamente como indicado.

(a) $f(x,y) = x^3 + y; x(t) = 3t, y(t) = t^3; 0 \le t \le 1$

(b) $f(x,y) = xy^{2/5}; x(t) = t/2; y(t) = t^{5/2}; 0 \le t \le 1$

(2) Nos itens a seguir calcule a integral ao longo da curva γ, nos dois sentidos de percurso.

(a) $\int_\gamma 6x^2ydx + xydy$ onde γ é o gráfico de $y = x^3 + 1$ entre $(-1,0)$ e $(1,2)$

(b) $\int_\gamma ydx + (x+y)dy$ onde γ é o gráfico de $y = x^2 + 2x$ entre $(0,0)$ e $(2,8)$

(3) Calcule $\int_\gamma (x-y)dx + xdy$ onde γ é o gráfico de $y^2 = x$ de $(4,-2)$ a $(4,2)$.

(4) Calcule $\int_\gamma xydx + x^2y^3dy$ onde γ é o gráfico de $y^3 = x$ de $(0,0)$ a $(1,1)$.

(5) (†) Calcule $\int_\gamma xydx + (x+y)dy$ para cada uma das curvas γ de $(0,0)$ a $(1,3)$. Esboce γ.

(a) γ é o segmento de reta de $(0,0)$ a $(1,0)$ e de $(1,0)$ a $(1,3)$;

(b) γ é o segmento de reta de $(0,0)$ a $(0,3)$ e de $(0,3)$ a $(1,3)$;

(c) γ é o segmento de reta de $(0,0)$ a $(1,3)$;

(d) γ é parte da parábola $y = 3x^2$ de $(0,0)$ a $(1,3)$.

(6) (‡) Calcule $\int_\gamma (x^2+y^2)dx + 2xdy$ para cada uma das curvas γ de $(1,2)$ a $(-2,8)$. Esboce γ.

(a) γ é o segmento de reta de $(1,2)$ a $(1,8)$ e de $(1,8)$ a $(2,8)$;

(b) γ é o segmento de reta de $(1,2)$ a $(-2,2)$ e de $(-2,2)$ a $(2,8)$;

(c) γ é o segmento de reta de $(1,2)$ a $(2,8)$;

(d) γ é parte da parábola $y = 2x^2$ de $(1,8)$ a $(-2,8)$.

(7) Calcule (a) $\int_\gamma xzdx + (y+z)dy + xdz$, se $\gamma(t) = (e^t, e^{-t}, e^{2t})$, com $t \in [0,1]$; (b) $\int_\gamma ydx + zdy + xdz$ se $\gamma(t) = (\text{sen}(t), 2\,\text{sen}(t), \text{sen}^2(t))$, com $t \in [0, \pi/2]$.

(8) Calcule

$$\int_\gamma (x+y+z)dx + (x-2y+3z)dy + (2x+y-z)dz,$$

onde γ é a curva entre $(0,0,0)$ e $(2,3,4)$ descrita abaixo.

(a) γ consiste de três segmentos de reta, sendo o primero paralelo ao eixo-x, o segundo paralelo ao eixo-y e o terceiro paralelo ao eixo-z;

(b) γ consiste de três segmentos de reta, sendo o primero paralelo ao eixo-z, o segundo paralelo ao eixo-x e o terceiro paralelo ao eixo-y;

(c) γ é um segmento de reta.

(9) Calcule as integrais

(a) $\int_\gamma (x-y)dx + (y-z)dy + xdz$, onde γ é a curva entre $(1,-2,4)$ e $(-4,5,2)$ do tipo descrito nos itens (a)-(c) do exercício anterior.

(b) $\int_\gamma xyzds$, onde γ é o segmento de reta entre os pontos $(0,0,0)$ e $(1,2,3)$.

(10) Calcule $\int_\gamma (xy+z)ds$ sobre a hélice circular $x(t) = a\cos(t)$, $y(t) = a\,\mathrm{sen}(t)$, $z(t) = bt$, $t \in [0, 2\pi]$.

(11) Se um fio fino tem a forma de uma curva plana γ, e se sua densidade linear em (x,y) é $\delta(x,y)$, então os momentos com respeito aos eixos x e y são definidos por

$$M_x = \int_\gamma y\delta(x,y)ds \qquad M_y = \int_\gamma x\delta(x,y)ds.$$

(a) Escreva uma expressão para as coordenadas $(\overline{x}, \overline{y})$ do centro de massa, em função da massa do fio e dos momentos M_x e M_y.

(b) Se um fio fino está situado em um plano coordenado tal que sua forma coincida com parte da parábola $y = 4 - x^2$ entre $(-2,0)$ e $(2,0)$. Encontre a massa e o centro de massa se a densidade linear no ponto (x,y) é diretamente proporcional à sua distância ao eixo-y.

(c) Calcule $\int_\gamma (xy+z)ds$ sobre a hélice circular

$$\begin{cases} x(t) = a\cos(t), \\ y(t) = a\,\mathrm{sen}(t), \\ z(t) = bt; \end{cases}$$

com $t \in [0, 2\pi]$.

(d) Extenda as definições para a massa e o centro de massa de um fio em tres dimensões.

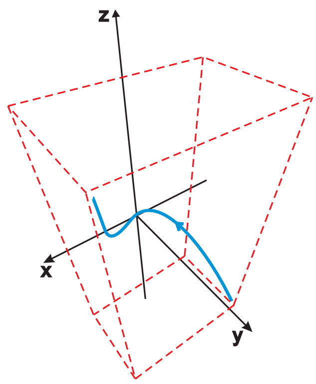
(12) Um fio com densidade linear constante tem a forma de uma hélice circular $x(t) = a\cos(t)$, $y(t) = a\,\mathrm{sen}(t)$, $z(t) = bt$, $t \in [0, 3\pi]$. Encontre a massa e o centro de massa do fio.

(13) Se $\mathbf{F}(x,y) = xy^2\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j}$ é um campo de forças, encontre o trabalho realizado por $\mathbf{F}$ ao longo das curvas descritas em (a)-(d) no exercício indicado por (†).

(14) Se $\mathbf{F}(x,y) = (2x+y)\mathbf{i} + (x+2y)\mathbf{j}$ é um campo de forças, encontre o trabalho realizado por $\mathbf{F}$ ao longo das curvas descritas em (a)-(d) no exercício indicado por (‡).

(15) Uma força atuando em um ponto (x,y) do plano coordenado é dado por $\mathbf{F}(x,y) = (4/||\mathbf{r}||^3)\mathbf{r}$, onde $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$. Encontre o trabalho realizado por $\mathbf{F}$ ao longo da parte superior da circunferência $x^2 + y^2 = a^2$ de $(-a, 0)$ a $(a, 0)$.

(16) A força no ponto (x,y) em um plano coordenado é dado por $\mathbf{F}(x,y,z) = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$. Encontre o trabalho realizado pela força F ao longo da *twisted cubic* dada por $x(t) = t, y(t) = t^2, z(t) = t^3$, de $(0,0,0)$ a $(2,4,8)$.



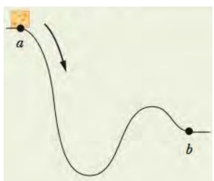
Twisted cubic

(17) Resolva o exercício anterior para $\mathbf{F}(x,y,z) = e^x\mathbf{i} + e^y\mathbf{j} + e^z\mathbf{k}$.

(18) Se um objeto desenvolve um movimento através de um campo de forças $\mathbf{F}$ tal que em cada ponto (x,y,z) sua velocidade é ortogonal à $\mathbf{F}(x,y,z)$. Mostre que o trabalho realizado por $\mathbf{F}$ sobre o objeto é zero.

(19) Caso $W = \int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, seja negativo, explique o significado deste sinal.

(20) A figura abaixo mostra um pedaço de 2,0 kg de queijo gorduroso que deslisa por um trilho sem atrito do ponto a ao ponto b. O queijo percorre uma distância total de 2,0 m ao longo do trilho e uma distância vertical de 0,80 m. Qual o trabalho realizado sobre o queijo pela força gravitacional durante o deslocamento?



R.1a14$(2\sqrt{2}-1)$; 2a.34/7; 3.$-16/3$; 5a.15/2;5b.6;5c.7;5d.29/4; 7.1/12$(3e^4 + 6e^{-2} - 12e + 8e^3 - 5)$; 8.19;35;27; 9b.$3\sqrt{14}/2$; 11.$(\overline{x}, \overline{y}) = (0, \pi a/4)$; 13.9/2(para todos os caminhos); 15.0; 16.412/15; 20.16 Joules.

Bom Estudo!