UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Curso de Matemática - Bacharelado

Sétima Lista de Exercícios de Análise III - MTM228
Prof. Júlio César do Espírito Santo

27 de Junho de 2016

(1) † (Uma função implícita) Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de Classe C^k ($k \geq 1$). Suponha que existam um ponto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e uma constante M tais que $f(x_0, y_0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \neq 0$ e $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \Big/ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right| \leq M$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Prove que para todo $x \in \mathbb{R}$, existe um único $y = \xi(x) \in \mathbb{R}$ tal que $f(x, \xi(x)) = 0$ e que a função $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, assim definida é de classe C^k.

(2) (Aproximações sucessivas) Seja M um espaço métrico completo. Toda *contraçao* $f : M \to M$ tem um único *ponto fixo*.
Dado qualquer ponto $x_0 \in M$, seja a sequencia $(x_k)_{k=0}^{\infty}$, definida por $x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), x_3 = f(x^2), \ldots$, converge em M para o único ponto fixo de f.

(3) (Perturbação da Identidade) Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ um aberto. Se $\Phi : U \to \mathbb{R}^m$ é uma contração, então a aplicação $f : U \to \mathbb{R}^m$ dada por $f(x) = x + \Phi(x)$ é um homeomorfismo de U sobre um aberto de $\mathbb{R}^m$.

(4) (Teorema da Aplicação Inversa) Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ um aberto e $f : U \to \mathbb{R}^m$ de Classe C^k ($1 \leq k \leq \infty$) tal que, em um ponto $x_0 \in U$, $Df(x_0) \in L(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^m)$ é um isomorfismo. Então, f é um difeomorfismo de Classe C^k de uma vizinhança V de x_0 sobre uma vizinhança W de $f(x_0)$.

(5) † (Teorema do Pôsto). Sejam $U \subset \mathbb{R}^{m+n}$ um aberto e $f : U \to \mathbb{R}^{m+p}$ uma aplicação de classeC^k ($k \geq 1$). Suponha que f tem posto m em cada ponto de U. Então, para todo $z_0 \in U$, existem difeomorfismos de classe c^k: α, de um aberto de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ sobre uma vizinhança de z_0, e β, de uma vizinhança de $f(z_0)$ sobre um aberto em $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$, tais que

$$\beta \circ f \circ \alpha : (x,y) \mapsto (x, 0).$$

Bom Descanso!