UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

8a. Lista de Matemática Aplicada à Engenharia de Controle e Automação - MTM146

Prof. Júlio César do Espírito Santo

29 de abril de 2019

(1) Usando as regras de derivação, onde f estiver definida, encontre as derivadas das seguintes funções de variável complexa:

(a) $f(s) = 3s^4 - 5s^3 + 2s$ (b) $f(s) = (s^2 - 1)/(4s + 1)$

(c) $f(s) = (1 - 4s^2)^3$ (d) $f(s) = [(1 + s^2)^4]/4s^2$

(2) Descreva a região na qual a função

$$f(z) = \frac{x}{x^2 + y^2} - j\frac{y}{x^2 + y^2}$$

seja holomorfa. Agora faça o mesmo para a função

$$f(z) = \frac{x}{x^2 + y^2} + j\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

`Resp. Qualquer domínio que não contenha a origem; Ponto algum.`

(3) Encontre as constantes reais a, b, c e d para que as funções a seguir sejam holomorfas.

(a) $f(z) = 3x - y + 5 + j(ax + by - 3)$

(b) $f(z) = x^2 + axy + by^2 + j(cx^2 + dxy + y^2)$.

(4) Para as funções a seguir, mostre que a função $f'(z)$ não existe em ponto algum.

(a) $f(z) = \overline{z}$ (b) $f(z) = z - \overline{z}$

(c) $f(z) = 2x + jxy^2$ (d) $f(z) = e^x e^{-jy}$

(5) Mostre que a função $f(z) = x^2 - x + y + j(y^2 - 5y - x)$ não e holomorfa em ponto algum, mas é diferenciável sobre a curva $y - x = 2$.

(6) Verifique que as funções $u(x,y)$ a seguir são harmônicas e encontre a função harmônica conjugada $v(x,y)$ correspondente. Escreva a função holomorfa $f(z) = u(x,y) + jv(x,y)$.

(a) $u(x,y) = 2x(1-y)$ (b) $u(x,y) = \operatorname{senh} x \operatorname{sen} y$

(c) $u(x,y) = x$ (d) $u(x,y) = x^2 - y^2$

(e) $u(x,y) = 4xy^3 - 4x^3y + x$ (f) $u(x,y) = \ln(x^2+y^2)$

(g) $u(x,y) = e^x(x\cos y - y \operatorname{sen} y)$ (h) $u(x,y) = 2x - 2xy$

`Resp.` $v(x,y) = x^2 - y^2 + 2y; v(x,y) = -\cosh x \cos y; f(z) = z; f(z) = z^2; f(z) = jz^4 + z$

(7) (a) Esboce as curvas de nível $u(x,y) = c_1$ e $v(x,y) = c_2$ relacionadas à função holomorfa $f(z) = z^2$.

(b) Descreva as curvas de nível de $f(z) = 1/z$.

(c) Descreva a curva de nível $v(x,y) = 0$ da função

$$f(z) = z + \frac{1}{z}.$$

(8) Esboce e identifique os gráficos das seguintes curvas em coordenadas polares.

(a) $r = 5$ (b)$\theta = -\pi/6$ (c) $r = 4\cos\theta$

(d) $r = 4(1 - \operatorname{sen}\theta)$ (e) $r = 8\cos 3\theta$ (f)$r^2 = 4\cos 2\theta$

(g) $r = 4\text{cossec}\theta$ (h) $r = 2 - \cos\theta$ (i) $r = 2^\theta; \theta \geq 0$

(j) $r = -6(1 + \cos\theta)$ (k) $r = 2 + 4\operatorname{sen}\theta$ (l) $r^2 = -16(\operatorname{sen} 2\theta)$

(9) Identifique e escreva na forma polar:

(a) $x = -3$ (b) $y = x^2$ (c) $x^2 + y^2 = 4$ (d) $x^2 - y^2 = 16$.

`Resp. Reta, parábola, circunferência, hipérbole.`

(10) Escreva na forma polar, identifique e desenhe a curva

$$(x^2 + y^2 - 2x)^2 = x^2 + y^2.$$

`Resp. Cardióide.`

Bons estudos!