UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Curso de Matemática - Bacharelado

Oitava Lista de Exercícios de Análise III - MTM228
Prof. Júlio César do Espírito Santo

09 de Julho de 2016

(1) Se U é aberto e $K \subset U$ é compacto, mostre que existe um compacto D tal que $K \subset \overset{\circ}{D}$ e $D \subset U$, onde $\overset{\circ}{D}$ é o interior do conjunto D.

(2) † Seja

$$f(x) = \begin{cases} e^{-(x-1)^{-2}} e^{-(x+1)^{-2}}, & \text{se } x \in (-1,1) \\ 0, & \text{se } x \notin (-1,1). \end{cases}$$

(a) Mostre que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função C^∞ a qual é positiva em $(-1,1)$ e zero fora deste intervalo.

(b) Mostre que existe uma função C^∞ $g : \mathbb{R} \to [0,1]$ tal que

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 0 \\ 1, & \text{se } x \geq \epsilon. \end{cases}$$

Dica: Se f é uma função que é positiva em $(0,\epsilon)$ e nula fora deste intervalo, seja $g(x) = \dfrac{\int_0^x f}{\int_0^\epsilon f}$.

(c) Se $a = (a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$, defina $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ por

$$g(x) = f\left(\frac{x_1 - a_1}{\epsilon}\right) \cdot f\left(\frac{x_2 - a_2}{\epsilon}\right) \cdot \ldots \cdot f\left(\frac{x_n - a_n}{\epsilon}\right).$$

Mostre que g é uma função C^∞ a qual é positiva no conjunto

$$(a_1 - \epsilon, a_1 + \epsilon) \times (a_2 - \epsilon, a_2 + \epsilon) \times \ldots \times (a_n - \epsilon, a_n + \epsilon),$$

e zero fora deste conjunto.

(d) Se $A \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto e $K \subset A$ é um compacto, mostre que existe uma função não negativa $f : A \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) > 0$ para algum $x \in C$ e $f = 0$ fora de algum conjunto fechado contido em A.

(e) Mostre que podemos escolher uma f destas de tal forma que $f : A \to [0,1]$ e $f = 1$ em C. Dica: Se a função f de (d) satisfaz $f \geq \epsilon$ para $x \in C$, considere $g \circ f$, onde g é a função de (b).

(3) Seja $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq x \leq 1/2 \\ 1, & \text{se } 1/2 \leq x \leq 1 . \end{cases}$$

Mostre que f é integrável e que $\int_{[0,1]\times[0,1]} f = 1/2$.

(4) † Seja $f : A \to \mathbb{R}$ uma função integrável e $g = f$ exceto em um número finito de pontos. Prove que g é integrável e que $\int_A g = \int_A f$.

(5) Faça o que se pede.

(a) Mostre que um conjunto ilimitado não pode ter conteúdo nulo.
(b) Dê um exemplo de um conjunto fechado, de medida nula cujo conteúdo não seja nulo.
(c) Se C é um conjunto de conteúdo nulo, mostre que sua fronteira ∂C tem conteúdo nulo.
(d) Dê exemplo de um conjunto limitado de medida nula tal que sua fronteira não tem medida nula.

(6) Se $A \subset [0,1]$ é a união de intervalos abertos (a_i, b_i) tais que cada número racional em $(0,1)$ esta contido em algum (a_i, b_i).
(a) Mostre que a fronteira ∂A é $[0,1] - A$.

(b) Se $\sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) < 1$, mostre que a fronteira de A não tem medida zero.

(c) Dê exemplo de um conjunto aberto que não seja Jordan-Mensurável.

(7) † (Lindelöf) Prove que se $A \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto qualquer e $\mathcal{O}$ é uma cobertura aberta para A, então existe uma subcobertura aberta enumerável para A.
Hint: Para cada $x \in A$, existe um retângulo $B = \Pi_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$ com a_i, b_i racionais tais que $x \in B \subset U$ com $U \in \mathcal{O}$.

(8) (Apostol) Calcule cada uma das seguintes integrais duplas:

(a) $\iint_Q [\operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen}^2 y] dxdy$, onde $Q = [0,\pi] \times [0,\pi]$.

(b) $\iint |\cos(x+y)| dxdy$, onde $Q = [0,\pi] \times [0,\pi]$.

(c) $\iint_Q \lfloor x+y \rfloor \, dxdy$, onde $Q = [0,2] \times [0,2]$, e $\lfloor t \rfloor$ é o maior inteiro menor ou igual a t.

(9) † (Aliprantis-Burkinshaw) Seja C o conjunto triádico de Cantor construido a partir de $[0, 1]$. Mostre que a função característica de C, denotada [1] e definida por

$$\chi_C(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in C \\ \\ 0, & \text{se } x \notin C. \end{cases}$$

é Riemann-integrável sobre $[0, 1]$ e que $\int_{[0,1]} \chi_C = 0$.

(10) † (Aliprantis-Burkinshaw) Seja $0 < \epsilon < 1$ e $\delta = 1 - \epsilon$. Denotando por C_ϵ o ϵ-Conjunto de Cantor construído da seguinte forma: Começando com $A_0 = [0, 1]$, remova da parte central de A_0 um intervalo aberto de comprimento $2^{-1}\delta$. Seja A_1 o conjunto restante, isto é,

$$A_1 = \left[0\,,\ \frac{1}{2} - \frac{\delta}{4}\right] \cup \left[\frac{1}{2} + \frac{\delta}{4}\,,\ 1\right].$$

No próximo passo, remova do centro de cada um dos 2^1 intervalos fechados disjuntos que compõem A_1 um intervalo aberto de comprimento $2^{-3}\delta$.

Seja A_2 a união dos 2^2 intervalos fechados disjuntos restantes.

O passo geral é dado da seguinte forma: Suponha que A_n tenha sido construído pela união dos 2^n intervalos fechados disjuntos restantes dos passos anteriores. Do centro de cada um destes intervalos fechados, delete um intervalo aberto de comprimento $2^{-2n-1}\delta$. A_{n+1} será a união destes 2^{n+1} intervalos fechados disjuntos restantes. O ϵ-Conjunto de Cantor é agora definido como sendo o conjunto

$$C_\epsilon = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

(a) Mostre que C_ϵ é um conjunto fechado, nunca denso e calcule seu volume. (b) Mostre que χ_{C_ϵ} não é Riemann-integrável sobre $[0, 1]$. Calcule a integral superior e a integral inferior de χ_{C_ϵ} sobre $[0, 1]$. (Dica, mostre que o conjunto dos pontos de descontinuidade de χ_{C_ϵ} é C_ϵ.)

Bom Descanso!

[1] Em alguns textos, encontra-se a notação $\mathbb{1}_A(x)$, no lugar de $\chi_A(x)$.