UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Nona Lista de Exercícios de Cálculo Diferencial e Integral III - MTM124

Prof. Júlio César do Espírito Santo

12 de Julho de 2016

(1) Seja $z = x^2 + y$. Considere S a superfície formada pelo gráfico de $z = f(x, y)$ sobre o quadrado unitário no plano-xy. Seja $\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{i} + x\mathbf{k}$ Encontre o fluxo (de baixo para cima) de $\mathbf{F}$ através de S.

(2) Calcule as integrais envolvidas no Teorema de Stokes para $\mathbf{F}$ e S dados.

(a) $\mathbf{F}(x, y, z) = y^2\mathbf{i}+z^2\mathbf{j}+x^2\mathbf{k}$ e S é a parte do plano $x+y+z = 1$ que está no primeiro octante.

(b) $\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$ e S é o hemisfério $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$.

(3) Use o Teorema de Stokes para calcular

(a) $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde C é a curva $x = \cos t, y = \operatorname{sen} t, z = 1; 0 \leq t \leq 2\pi$ e $\mathbf{F} = (3z - \operatorname{sen} x)\mathbf{i} + (x^2 + e^y)\mathbf{j} + (y^3 - \cos z)\mathbf{k}$

(b) $\iint_S rot\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}dS$, onde S é parte do paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ cortado pelo plano $z = 0$ e $\mathbf{F} = 2y\mathbf{i} + e^z\mathbf{j} - \arctan x\mathbf{k}$.

(4) Use o Teorema da Divergência para calcular o fluxo de $\mathbf{F}$ através de S.

(a) $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ e S é a superfície $x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = 1$

(b) $\mathbf{F}(x, y, z) = 3x\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ e S é a fronteira da região limitada pelo paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ e por $z = 0$.

(5) (†) Seja $\mathbf{V}(x, y, z, t)$ um campo vetorial continuamente diferenciável em $\mathbb{R}^3$ para cada t e seja $\rho(x, y, z, t)$ uma função real continuamente diferenciável. Pela **Lei de Conservação de Massas**, entende-se que a condição $\frac{d}{dt}\iiint_W \rho dV = -\iint_{\partial W} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$ vale para todas as regiões W de $\mathbb{R}^3$, onde $\mathbf{J} = \rho\mathbf{V}$.

Use o Teorema da Divergência para provar que a Lei de Conservação de Massas é equivalente à equação de continuidade

$$\text{div}\mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

isto é,

$$\rho\text{div}\mathbf{V} + \mathbf{V}\nabla\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Na equação acima a divergência é calculada nas variáveis espaciais x, y e z, e a derivada $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ é calculada sobre a variável temporal t mantendo as variáveis espaciais fixas.

♣

R.1.-1/2; 2.-1;πa^2; 3.0;-8π; 4.0;$136\pi : 3$;