

UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

9a. Lista de Matemática Aplicada à Engenharia de Controle e Automação - MTM146

Prof. Júlio César do Espírito Santo

29 de abril de 2019

- (1) Sabendo que as equações de Cauchy-Riemann na forma polar tornam-se

$$u_r(r_0, \theta_0) = \frac{1}{r_0} v_\theta(r_0, \theta_0) \quad \text{e} \quad v_r(r_0, \theta_0) = -\frac{1}{r_0} u_\theta(r_0, \theta_0),$$

encontre a harmônica conjugada $v(r, \theta)$ de $u(r, \theta) = \ln r$, para $r > 0$ e $0 < \theta < 2\pi$.

Resp. $v(r, \theta) = \theta$

- (2) Um número $z \in \mathbb{C}$ para o qual $f(z) = 0$ é chamado de um *zero* da função f dada. Encontre os zeros das funções $\cos(z)$, $\sen(z)$, $\cosh(z)$ e $\sinh(z)$.

Resp. $(k + 1/2)\pi; k\pi; (k + 1/2)\pi j; k\pi j$; com $k = 0 \pm 1, \pm 2, \dots$

- (3) Calcule.

(a) $\text{Ln}(-ej)$ (b) $\text{Ln}(1 - j)$ (c) j^{-2j} (d) $(1 + j)^j$ (e) $\text{Ln}(j^2)$

(f) $(-1)^{1/\pi}$ (g) j^j (h) $[(e/2)(-1 - j\sqrt{3})]^{3\pi j}$ (i) $(1 - j)^{4j}$ (j) $2\text{Ln}(j)$

Resp. a. $1 - (\pi/2)j$; b. $(1/2)\text{Ln}(2) - (\pi/4)j$; c. $e^{(4k+1)\pi}$; d. $e^{-\pi/4+2k\pi} e^{(j/2)\ln 2}$; e. $(2k + 1)\pi j$; f. $e^{(2k+1)j}$; Os valores principais são: g. $e^{-\pi/2}$; h. $-e^{2\pi^2}$; j. $(4k + 1)\pi j$

- (4) Prove que (a) $\arccos(z) = -j \ln[z + j(1 - z^2)^{1/2}]$; e (b) $\arcsen(z) = -j \ln[jz + (1 - z^2)^{1/2}]$.

- (5) Prove que

- (a) se $\text{Ln}(z) = \ln r + j\theta$; com $r > 0$ e $\theta \in (\pi/4, 9\pi/4)$, então $\text{Ln}(j^2) = 2\text{Ln}(j)$;
 (b) se $\text{Ln}(z) = \ln r + j\theta$; com $r > 0$ e $\theta \in (3\pi/4, 11\pi/4)$, então $\text{Ln}(j^2) \neq 2\text{Ln}(j)$.

- (6) Usando as regras de derivação, onde f estiver definida, encontre as derivadas das seguintes funções de variável complexa:

(a) $f(s) = \sec(s)$ (b) $f(s) = \text{tg}(s)$ (c) $f(s) = \text{cossec}(s)$ (d) $f(s) = \text{cotg}(s)$
 (e) $f(s) = \text{sech}(s)$ (f) $f(s) = \text{tgh}(s)$ (g) $f(s) = \text{cossech}(s)$ (h) $f(s) = \text{cotgh}(s)$

- (7) (*Transformações*) (a) Mostre que a função $F(s) = (1 + j)s + 2 - j$ transforma um retângulo de vértices $0, 1, 2j$ e $1 + 2j$ no retângulo de vértices $3, j$ e $2 - j$. Desenhe os retângulos nos planos xy e uv . Determine o quarto vértice.

- (b) Mostre que a função $F(s) = 1/s$ transforma o semiplano $y > c_2$ no interior de um círculo, desde que $c_2 > 0$.

Bons estudos!