UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Curso de Matemática - Bacharelado

Nona Lista de Exercícios de Análise III - MTM228

Prof. Júlio César do Espírito Santo

04 de Agosto de 2016

(1) Sendo $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ integráveis, então $f+g$, f^2 e fg também são integráveis.

(2) Seja $f : A \to \mathbb{R}$ uma função limitada no bloco $A \subset \mathbb{R}^n$, com $f(x) > 0$ para todo $x \in A$. Prove que se f é integrável então o conjunto $C(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1} \ / \ x \in A,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$ é Jordan-mensurável e $vol.C(f) = \int_A f(x)dx$.

(3) Seja $f : U \to \mathbb{R}^n$, de Classe C^1 no aberto U de $\mathbb{R}^n$. Para algum $a \in U$, seja $f'(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um isomorfismo. Então

$$\lim_{r \to 0} \frac{vol.f(B(a;r))}{vol.B(a;r)} = |\det f'(a)|.$$

Se $f'(a)$ não for um isomorfismo, o limite acima vale zero.

(4) Se α é um escalar, prove que, para o produto tensorial $\otimes$, valem

$$\begin{aligned}
(S_1 + S_2) \otimes T &= S_1 \otimes T + S_2 \otimes T \\
S \otimes (T_1 + T_2) &= S \otimes T_1 + S \otimes T_2 \\
(\alpha S) \otimes T &= S \otimes (\alpha T) \quad = \quad \alpha(S \otimes T) \\
(S \otimes T) \otimes U &= S \otimes (T \otimes U)
\end{aligned}$$

Além disso, se $f : V \to W$ é uma transformação linear, e f^* é outra transformação linear $f^* : \mathcal{J}^k(W) \to \mathcal{J}^k(V)$ definida por

$$f^*T(v_1, v_2, ..., v_k) := T(f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_k)),$$

para $T \in \mathcal{J}^k(W)$ e $v_1, v_2, ..., v_k \in V$, prove que

$$f^*(S \otimes T) = f^*S \otimes f^*T.$$

(5) † Se a é um escalar, mostre que para o produto exterior $\wedge$, valem

$$\begin{aligned}
(\omega_1 + \omega_2) \wedge \eta &= \omega_1 \wedge \eta + \omega_2 \wedge \eta \\
\omega \wedge (\eta_1 + \eta_2) &= \omega \wedge \eta_1 + \omega \wedge \eta_2 \\
\alpha\omega \wedge \eta &= \omega \wedge \alpha\eta \quad = \quad \alpha(\omega \wedge \eta) \\
\omega \wedge \eta &= (-1)^{kl}(\eta \otimes \omega) \\
f^*(\omega \wedge \eta) &= f^*\omega \wedge f^*\eta.
\end{aligned}$$

(6) Se $f : V \to V$ uma transformação linear e $\dim V = n$, então $f^* : \Lambda^k(V) \to \Lambda^k(V)$ é necessariamente a multiplicação por alguma constante c. Mostre que $c = \det f$.

Bom Descanso!