Universidade Federal de Viçosa
Centro de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Gabarito $4^{\underline{a}}$ Lista - MAT 137 - Introdução à Álgebra Linear 2011/II

1. Os ítens (a) e (b) não são transformações lineares e os ítens (c) e (d) são transformações lineares.

2. Somente para $k = 0$ temos que T é transformação linear.

3. A imagem é o losango de vértices $(0,0), (-1,2), (2,-1)$ e $(1,1)$.

4. (a) $4u - v$

   (b) $3u - 3v$

   (c) $7u + 5v$

5.

6. (a) $T(x,y,z) = (3x - y - z, 4x - y - z)$

   (b) v é qualquer vetor pertencente ao conjunto $\{(1, 6-c, c); c \in I\!R\}$

   (c) v é qualquer vetor pertencente ao subespaço $[(0,-1,1)]$

7. (a) $T(x,y) = (-y,-x)$

   (b) $T(x,y) = (-x,-y)$

   (c) $T(x,y) = (x,0)$

8. $T(x,y,z) = (x,y,-z)$.

9. (a) $N(T) = \{(0,0)\}$ e $Im(T) = [(1,1,0),(1,0,2)]$

   (b) $N(T) = \{(-y,y,-y); y \in I\!R\}$ e $Im(T) = \{[(1,0),(0,1)]\}$. Temos $(0,0,0), (1,-1,1) \in N(T)$.

10. $B_{N(T)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ e $B_{Im(T)} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\}$

11. $N(T) = [(0,0,1)]$. Geometricamente representa o eixo z. $Im(T) = \{(x,y,z) \in I\!R^3; z = 0\}$. Geometricamente é o plano xy.

12.

13. (a) Não

    (b) Sim

    (c) $B_{N(T)} = \{t^3 + t^2, t + 1\}$

    (d) $B_{Im(T)} = \{t^3, t\}$

14. $T(x,y,z) = (0,z)$

15. $T(x,y) = (x, x+y, x+y)$

16. (a) $\dim V = 7$

    (b) $\dim V = 5$

17.

18. (a)

    (b) Sim

(c) $N(T) = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & -a_{11} \end{bmatrix} \right\}$

(d) $B_{Im(T)} = \{1\}$.

19. Ambos são isomorfismos. As inversas são $T^{-1}(x,y,z) = (x+3y+14z, y+4z, z)$ e $T^{-1}(x,y,z) = (x, x-y, 3x-y-z)$

20. (a) $T(x,y) = (10x+18y, 5x+11y, -x-4y)$ e $[T] = \begin{bmatrix} 10 & 18 \\ 5 & 11 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$

    (b) $(-34, -23, 10)$

    (c) $(2,4,-2) \notin Im(T)$

21. (a) $T(x,y,z) = (2x+y-z, x, -2x-y+2z)$

    (b) $[T] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

    (c) Sim. $T^{-1}(x,y,z) = (y, 2x-2y+z, x+y)$

22. (a) $S^{-1} = S$

    (b) $T^{-1} = T$

    (c) $(S \circ T)(x,y) = (y,-x)$. Rotação de 90^o no sentido horário.

    (d) $(T \circ S)(x,y) = (-y,x)$. Rotação de 90^o no sentido anti-horário.

23. $B = \{(1,3), (-3,1)\}$

24. (a) T é isomorfismo quando $-2ac - ab - b + 2 \neq 0$.

    (b) Quando $-2ac - ab - b + 2 = 0$.

    (c) Não existem $a, b, c \in I\!R$.

    (d) Não.

25. (a) $[T]_C^B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

    (b) $v = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right)$

26. (a) $[T(v_1)]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}; [T(v_2)]_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

    (b) $T(v_1) = (3,-1), T(v_2) = (-2,29)$

    (c) $T(x,y) = \left(\frac{18x+y}{7}, -13x+4y\right)$

27. $T(x,y) = (x, -10x+9y, -4x+3y)$

28. $T(ax^2+bx+c) = b(-x^2+1) + (2a+c)x, N(T) = \{ax^2 - 2a; a \in I\!R\}$ e $Im(T) = [-x^2+1, x]$

29.

30. (a) $T(x,y) = \left(\frac{5x+2y}{3}, \frac{-2x+10y}{3}\right)$

    (b) $[T]_B^B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

31. (a) Sim

    (b) Sim

32. (a) $\lambda_1 = 2, v_1 = (2,1); \lambda_2 = 3, v_2 = (1,1)$

(b) $\lambda_1 = 4, v_1 = (1,1); \lambda_2 = 1, v_2 = (-2,1)$

(c) $\lambda_1 = 1, v_1 = (1,0,0), v_2 = (0,-1,1); \lambda_2 = 4, v_3 = (1,1,2)$

(d) $\lambda_1 = -1, v_1 = (0,-3,1); \lambda_2 = 1, v_2 = (-1,1,1); \lambda_3 = 2, v_3 = (0,0,1)$

33. $T(x,y) = \left(\frac{-4x+5y}{2}, 3y\right)$

34. (a) 10

(b) Não

(c) 4

(d) Cada autoespaço associado ao autovalor λ_1 tem dimensão no máximo o grau do monômio $(x - \lambda_1)$

(e) Cada autoespaço associado ao autovalor λ_1 tem dimensão igual ao grau do monômio $(x - \lambda_1)$

(f) Esse autovalor tem multiplicidade geométrica maior ou igual a 3

35. (a) F (b) V (c) V

36.

37. $p_T(x) = (x-2)(x+3)^2$;
$\lambda_1 = -3, v_1 = (0,1,0)$;
$\lambda_2 = 2, v_3 = (1,0,0)$;

38. T é diagonalizável. Uma base que diagonaliza T é $B = \{(0,1,3),(1,0,0),(0,0,1)\}$

39.

40. $T(x,y) = (2x, x+3y)$ é diagonalizável e uma base é formada pelos vetores citados no exercício.

41. (a)$T(x,y) = (-2y, 2x)$ $(b)T(x,y,z) = (3x, 0, -x+2z)$

42. (a)F, (b)F, (c)V