Gabarito da Lista de Exercícios do Professor Vinícius V. P. de Almeida
Resolvida por Juliano Soares Amaral Dias

Obervação: Não tive tempo de conferir as respostas. Informem se encontrarem algum erro.

1. Não é produto interno. Basta dar um contra-exemplo.

$$\langle (1,-1),(0,1)\rangle \neq \langle (0,1),(1,-1)\rangle$$

2. É um produto interno Basta verificar que é uma função

$$\langle\ \ ,\ \ \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

e que satisfaz as quatro propriedades que definem o produto interno.

3. É um produto interno Basta verificar que é uma função

$$\langle\ \ ,\ \ \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

e que satisfaz as quatro propriedades que definem o produto interno.

(Obs: vocês podem demonstrar que

$$\langle (a,b,c),(x,y,z)\rangle = \alpha_1 ax + \alpha_2 by + \alpha_3 cz$$

é um produto interno para quaisquer números reais positivos $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$)

4. Recomendo que façam este exercício. Lembrem-se que

$$\mathcal{P}_2(\mathbb{R}) = \{p(t) = at^2 + bt + c | a,b,c \in \mathbb{R}\}$$

   (a) Basta usar as propriedades de integral estudadas em Cálculo, verificando que satisfaz as quatro propriedades que definem o produto interno.

   (b) Sim, pois

$$\int_{-1}^{1} t(t^2+1)dt = \int_{-1}^{1} (t^3+t)dt = \frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{2} \mid_{-1}^{1} = 0.$$

5. Aplicando o processo de Gram-Schmidt obtemos a base ortogonal $\{1, -t\}$.

6. Aplicando o processode Gram-Schmidt na base $\{(1,0,-1),(0,1,1)\}$, obtemos a base ortogonal $\{(1,0,-1),(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2})\}$.

7. $v = (2,4,1)$

8. (a) Basta verificar que é uma função

$$\langle\ \ ,\ \ \rangle : M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

   e que satisfaz as quatro propriedades que definem o produto interno.

   (b) $arcos(\frac{2}{\sqrt{21}})$

   (c) $x = -6$

9. $proj_v^w = \frac{23}{74} \cdot (3,4,7)$

10. $B$ não é ortonormal. Aplicando o processo de Gram-Schmidt, obtemos a base ortonormal $B' = \{(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{-2}{\sqrt{5}}), (\frac{6}{\sqrt{70}}, \frac{5}{\sqrt{70}}, \frac{3}{\sqrt{70}})\}$

11. $\beta$ é uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ e $[(5,5,5)]_\beta = (3, -1, \frac{5}{3})$.

12. Aplicando o processo de Gram-Schmidt em $\beta$ obtemos a base ortonormal $\beta' = \{(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}), (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}})\}$

13.

14.

15.

16. (a) Falso, pois $u = (0,1)$ e $v = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$ são vetores de $\mathbb{R}^2$ tais que $\|u\| = \|v\| = \|u+v\| = 1$ mas o ângulo entre $u$ e $v$ é igual à $\frac{\pi}{3}$.

    (b) Falso, pois $u = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ e $v = (0,1)$ são vetores de $\mathbb{R}^2$ tais que $\|u\| = \|v\| = \|u-v\| = 1$ mas o ângulo entre $u$ e $v$ é igual à $\frac{\pi}{3}$.
    (Obs:Nos dois últimos casos, obtemos os exemplos construindo triângulos com os vetores)

    (c) Verdadeiro, desenvolver $\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2$.

    (d) Falso, resposta certa é $-9$.

    (e) Falso

    (f) Verdadeiro, Demonstrado em sala

    (g) Verdadeiro demonstrado em sala