Gabarito da Quarta Lista de Álgebra Elementar

Juliano Soares Amaral Dias

1. Representam um polinômio na variável x:
   (a) $f(x) = x^3 - x + 2$
   (b) $f(x) = 0$
   (d) $f(x) = x^{15}$

2. $a = -\dfrac{1}{2}$, $b = -\dfrac{5}{2}$ e $c = 0$.

3. (a) $f(0) = -2$
   (b) $f(1) = -1$
   (c) $f(-2) = -16$
   (d) $f(2x) = 8x^3 - 4x^2 + 2x - 2$
   (e) $f(-x) = -x^3 - x^2 - x - 2$
   (f) $f(x-2) = x^3 - 7x^2 + 17x - 16$
   (g) $f(f(-1)) = -157$

4. (a) $(f+g)(x) = x^3 - 2x^2 + x + 5$
   (b) $(f+h)(x) = 2x^3 - x^2 + 4x - 6$
   (c) $(f-h)(x) = -x^2 - 2x + 2$
   (d) $(g \cdot h)(x) = -x^5 + 4x^3 + 4x^2 + 21x - 28$

5. $a = 3$ e $b = 2$

6.
$$\begin{aligned}
&f(x) = (x+3)^2 + (x-1)^2 - 2(x+1)^2 - 8\\
&f(x) = x^2 + 6x + 9 + x^2 - 2x + 1 - 2(x^2 + 2x + 1) - 8\\
&f(x) = x^2 + 6x + 9 + x^2 - 2x + 1 - 2x^2 - 4x - 2 - 8\\
&f(x) = x^2 + x^2 - 2x^2 + 6x - 2x - 4x + 9 + 1 - 2 - 8\\
&f(x) = 0
\end{aligned}$$

7. (a) $\partial f = 3$
   (b) $\nexists\ \partial g$
   (c) $\partial h = 3$
   (d) $\partial p = 3$
   (e) $\partial q = 7$
   (f) $\partial r = 7$
   (g) $\partial(f+h) = 3$
   (h) $\partial(f-h) = 2$

(i) $\partial(r-q)=7$

(j) $\partial(r+q)=4$

(k) $\partial(f\cdot r)=10$

8.
$$f(x)=(x^3-2x)(2x-3)+x^2-x+1$$
$$f(x)=2x^4-3x^3-3x^2+5x+1$$

9. O grau do dividendo é igual a 8 nas duas hipóteses.

10. Dividir f por g aplicando o método de Descartes:

    (a) $q(x)=x$ e $r(x)=-4x^2+8x+2$

    (b) $q(x)=5x^2+11x+12$ e $r(x)=0$

    (c) $q(x)=3x^2-x+8$ e $r(x)=-5x^2+21x-11$

    (d) $q(x)=0$ e $r(x)=x^2+1$

    (e) $q(x)=0$ e $r(x)=0$

11. $a=-4$ e $b=3$.

12. (a) $q(x)=4x^5+8x^4+20x^3+45x^2+110x+272$ e $r(x)=655x+274$

    (b) $q(x)=3x^3+7x^2+14x+18$ e $r(x)=12$

    (c) $q(x)=3x^3-9x$ e $r(x)=29x^2+13x-3$

    (d) $q(x)=0$ e $r(x)=x^3+1$

    (e) $q(x)=0$ e $r(x)=0$

    (f) $q(x)=\frac{1}{2}$ e $r(x)=3x+\frac{5}{2}$

    (g) $q(x)=x^2+2x-1$ e $r(x)=0$

    (h) $q(x)=x+2$ e $r(x)=-x+7$

13. Se f e g são divisíveis por h, então existem $q_1(x)$ e $q_2(x)$ tais que $f=h\cdot q_1$ e $g=h\cdot q_2$. Segue que:

$$f+g=h\cdot q_1+h\cdot q_2=h\cdot(q_1+q_2)$$

$$f-g=h\cdot q_1-h\cdot q_2=h\cdot(q_1-q_2)$$

$$f\cdot g=h\cdot q_1\cdot h\cdot q_2=h\cdot(q_1\cdot h\cdot q_2)$$

Portanto, $f+g$, $f-g$ e $f\cdot g$ são divisíveis por h.

14. (a) $q(x)=x^{n-1}+ax^{n-2}+\cdots+a^{n-2}x+a^{n-1}$ e $r(x)=0$

    (b) $q(x)=x^{n-1}+ax^{n-2}+\cdots+a^{n-2}x+a^{n-1}$ e $r(x)=2a^n$

    (c) $q(x)=x^{n-1}-ax^{n-2}+\cdots+(-a)^{k-1}x^{n-k}+\cdots+(-a)^{n-2}x+(-a)^{n-1}$

$$r(x)=\begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ é par;}\\ -2a^n, & \text{se } n \text{ é impar.}\end{cases}$$

(d) $q(x) = x^{n-1} - ax^{n-2} + \cdots + (-a)^{k-1}x^{n-k} + \cdots + (-a)^{n-2}x + (-a)^{n-1}$

$$r(x) = \begin{cases} 2a^n, & \text{se } n \text{ é par;} \\ \\ 0, & \text{se } n \text{ é impar.} \end{cases}$$

15. Determinar os restos e os quocientes das divisões de f por g nos seguintes casos:

   (a) $q(x) = x^3 - 3x^2 + 9x - 27$ e $r(x) = 0$;
   (b) $q(x) = x^3 + 3x^2 + 9x + 27$ e $r(x) = 162$;
   (c) $q(x) = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16$ e $r(x) = 64$;
   (d) $q(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16$ e $r(x) = -64$;
   (e) $q(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ e $r(x) = 0$;
   (f) $q(x) = x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$ e $r(x) = 2$;
   (g) $q(x) = x^4 + 3x^3 + 9x^2 + 27x + 81$ e $r(x) = 486$;
   (h) $q(x) = x^4 - 3x^3 + 9x^2 - 27x + 81$ e $r(x) = 0$.

16. $a = 2$ é o único valor para o qual a divisão de $f(x) = x^4 - 2ax^3 + (a+2)x^2 + 3a + 1$ por $g(x) = x - 2$ apresente resto igual a 7.

17. Aplicando o dispositivo prático de Briot-Ruffini, determinar quociente e resto da divisão de f por g:

   (a) $q(x) = 7x^3 - 18x^2 + 38x - 76$ e $r(x) = 151$;
   (b) $q(x) = x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{13}{4}$ e $r(x) = \frac{51}{4}$;
   (c) $q(x) = 81x^4 + 54x^3 + 36x^2 + 24x + 16$ e $g(x) = \frac{128}{3}$;
   (d) $q(x) = x^2 - x$ e $r(x) = 0$.

18. $r(x) = 82$

19.
$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 2x + 3 = (x^2 - 2x + 3)(x^2 + 1)$$

20. $q(x) = x + 1$ e $r(x) = 0$.