UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Prof: Juliano Soares Amaral Dias

Segunda lista de Álgebra II

(1) Sejam $K \subset F \subset L$ e $p(x) = Irr(\alpha, K) \in K[x]$, em que $\alpha \in L$. Mostre que existe $g(x) = Irr(\alpha, F)$ e $g(x)$ divide $p(x)$ em $F[x]$.

(2) Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ algébricos tais que $\alpha^3 + \alpha + 1 = 0$ e $\beta^2 + \beta - 3 = 0$. Mostre que:
  (a) $\alpha + \beta$ são algébricos;
  (b) $\alpha \cdot \beta$ são algébricos;
  (c) que a soma e o produto de números algébricos são algébricos.

(3) Determine todos os homomorfismos de $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{3})$ em $\mathbb{C}$ e todos os automorfismos de $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{3})$.

(4) Ache $u \in \mathbb{Q}(\alpha, \beta)$ tal que $\mathbb{Q}(\alpha, \beta) = \mathbb{Q}(u)$, nos casos:
  (a) $\alpha = \sqrt{2}$ e $\beta = i$;
  (b) $\alpha = \sqrt{2}$ e $\beta = \sqrt[3]{2}$;
  (c) Em cada caso calcule $[\mathbb{Q}(u) : \mathbb{Q}]$.

(5) Considere ξ a 6º-raiz primitiva da unidade. Prove que $\mathbb{Q}(\xi) = \mathbb{Q}(\xi^2)$ e mostre com ξ pode ser obtido em $\mathbb{Q}(\xi^2)$.

(6) Seja ξ a 3º-raiz primitiva da unidade.
  (a) Determine $[\mathbb{Q}(i, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}(\xi)]$;
  (b) Mostre que $\mathbb{Q}(\xi) = \mathbb{Q}(i\sqrt{3})$.

(7) Determine se o elemento $\alpha \in K$ é algébrico ou transcedente sobre F, em cada caso. Quando for algébrico, determine seu grau.
  (a) $K = \mathbb{C}$, $F = \mathbb{Q}$ e $\alpha = e^2$;
  (b) $K = \mathbb{C}$, $F = \mathbb{R}$ e $\alpha = \pi$;
  (c) $K = \mathbb{R}$, $F = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ e $\alpha = \sqrt{5}$;
  (d) $K = \mathbb{C}$, $F = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ e $\alpha = \xi$, em que ξ é a 8º-raiz primitiva da unidade.

(8) Seja p primo e ξ a p-ésima raiz primitiva da unidade. Mostre que:
  (a) $\mathbb{Q}(\xi) = \{a_0 + a_1\xi + \cdots + a_{p-2} \mid a_i \in \mathbb{Q}, 0 \leqslant i \leqslant p-2\}$;
  (b) se L um corpo tal que $\mathbb{Q} \subseteq L \subseteq \mathbb{Q}(\xi)$, então $[L : \mathbb{Q}]$ divide $p - 1$.

(9) Calcule o grau da extensão $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{3}, \sqrt[6]{3}, i)$ sobre $\mathbb{Q}$.

(10) Mostre que se $[L : K] = 2n + 1$ e $L = K(\alpha)$, então $L = K(\alpha^2)$.

(11) Verifique se $f(x) = x^5 - 20x + 5$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$ e calcule $Gal(f(x), \mathbb{Q})$.

(12) Seja ξ uma raiz n-ésima primitiva da unidade, com n ímpar. Mostre que $-\xi$ é uma raiz $2n$-ésima primitiva da unidade.

(13) Mostre que:
  (a) $Gal(x^2 - 3, \mathbb{Q}) = Gal(x^2 - 2x - 2, \mathbb{Q})$;
  (b) $[Gal(x^4 - 4x^2 - 5, \mathbb{Q}) : \mathbb{Q}] = 4$;
  (c) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i) = Gal(x^2 - 2\sqrt{2}x + 3, \mathbb{Q})$;
  (d) $Gal(x^4 - 2, \mathbb{Q}) \subset Gal(x^4 + 2, \mathbb{Q})$

(14) Verifique se as afirmações são verdadeiras ou falsas. Em qualquer caso, justifique.
  (a) As extensões $\mathbb{Q}(3 - 2i)$ e $\mathbb{Q}(\frac{2}{1+i})$ sãol iguais.
  (b) $\mathbb{Q}(\pi^2 - 1)$ é uma extensão algébrica de $\mathbb{Q}(\pi^6)$.
  (c) $[Gal(x^3 - 8, \mathbb{Q})] = 3$.
  (d) $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{5}, i)$ é o corpo de decomposição de algum polinômio sobre $\mathbb{Q}$.
  (e) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})$ não é uma extensão normal de $\mathbb{Q}$.
  (f) $\sqrt{\pi}$ é algébrico sobre $\mathbb{Q}(\pi)$.
  (g) $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{10}) : \mathbb{Q}] = 4$.

(15) Assuma que $u, v \in K$ são algébricos sobre F com polinômios minimais $p(x) = Irr(u, F)$ e $q(x) = Irr(v, K)$.

(a) Se $gr(p(x)) = m$, $gr(q(x)) = n$ e $mdc(m, n) = 1$ então prove que $[F(u, v) : F] = m \cdot n$.

(b) Mostre que a conlusão da parte (a) pode ser falsa se m e n não são relativamente primos.

(c) Determine $[\mathbb{Q}(\sqrt{7}, \sqrt[5]{9}) : \mathbb{Q}]$.

(16) Seja K uma extensão de F. Mostre que:

(a) Se $[K : F] = 2$ então K é uma extensão normal de F.

(b) Seja $K = F(u)$ com u transecente sobre F. Se L é um corpo intermediário da extensão então u é algébrico sobre L.

(c) Se $K = F(u)$, onde u é algébrico sobre F de grau ímpar, então $K = F(u^2)$.

(17) Dê um exemplo de extensões $F \subset L \subset K$, em que L é uma extensão normal de F e K é uma extensão normal de L mas K não é uma extensão normal de F.