Universidade Federal de Viçosa
Centro de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

$3^{\underline{a}}$ Lista - MAT 137 - Introdução à Álgebra Linear 2013/I

1. Sejam $u = (-4, 3)$, $v = (2, -5)$ e $w = (a, b)$. Encontre a e b tais que
   $(a) w = 2u + 3v$, $(b) w = \frac{2}{5}v$, $(c) u + w = 2u - v$.
   Represente os vetores acima no plano cartesiano.

2. Sejam $u = (4, -1, 2)$, $v = (3, -2, -4)$ e $w = (a, b, c)$. Encontre a, b, c tais que:
   $(a) w - u = v$, $(b) w = 3v$, $(c) u + w = 2u - v$.

3. Sejam $u = (-3, 1, 2)$, $v = (4, 0, -8)$ e $w = (6, -1, -4)$. Encontre escalares c_1, c_2 e c_3 tais que $c_1u + c_2v + c_3w = (2, 0, 4)$.

4. Encontre todos os escalares c_1, c_2 e c_3 tais que $c_1u + c_2v + c_3w = (0, 0, 0)$, onde $u = (1, 2, -3), v = (2, 1, -3)$ e $w = (-2, 5, -6)$.

5. Nos ítens a e b são apresentados um conjunto com as operações de adição e multiplicação por escalar nele definidas. Verifique se eles são espaços vetoriais. Para aquele que não for, citar os axiomas que não se verificam.

   (a) $V = I\!R^2$; $(a, b) + (c, d) = (a + b, 0)$ e a multiplicação escalar usual.
   (b) $V = I\!R^2$; $(a, b) + (c, d) = (a + b, c + d)$ e $\alpha(a, b) = (\alpha^2 a, \alpha^2 b)$.

6. Verifique detalhadamente que os seguintes conjuntos são espaços vetoriais(com a soma e produto por escalar usuais):

   (a) Matrizes quaisquer de ordem 3×2.
   (b) Polinômios de grau menor ou igual a 4.
   (c) Conjunto das funções contínuas de $I\!R$ em $I\!R$.

7. Em cada ítem deste exercício são dados um espaço vetorial V e um subconjunto W de V. Verifique se W é subespaço vetorial V.

   (a) $V = (I\!R^3, +, ., I\!R)$ $\quad W = \{(x, y, z) \in I\!R^3; x + y + z = 0\}$;
   (b) $V = (I\!R^3, +, ., I\!R)$ $\quad W = \{(x, y, z) \in I\!R^3; x + y + z \leq 1\}$;
   (c) $V = (M_{3\times3}(I\!R), +, ., I\!R)$ $\quad W = \left\{A \in M_{3\times3}; A = A^T\right\}$;
   (d) $V = (M_{2\times2}, +, ., I\!R)$ $\quad W = \{A \in M_{2\times2}; \det A = 0\}$.

8. Considere $W = \{(x, y, z) \in I\!R^3; ax + by + cz = d,\ \text{onde}\ a, b, c, d \in I\!R\}$. Para que valores de a, b, c e d, W é um subespaço vetorial de $I\!R^3$?

9. Mostre que os seguintes subconjuntos de $I\!R^4$ são subespaços de $I\!R^4$.

(a) $W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4; x - y - 3z = 0\}$;

(b) $W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4; x - y + 2z = 0 \text{ e } t = 0\}$.

10. Sejam os vetores $u = (2,-3,2)$ e $v = (-1,2,4)$ em $\mathbb{R}^3$.

    (a) Escreva $w = (7,-11,2)$ como combinação linear de u e v.

    (b) O vetor $(2,-5,4)$ pode ser escrito como combinação linear de u e v? Justifique.

    (c) Para que valores de k o vetor $w = (-8,14,k)$ é combinação linear de u e v?

    (d) Encontre condições sobre a, b e c de modo que o vetor $w = (a,b,c)$ seja combinação linear de u e v.

11. Quais dos seguintes subconjuntos são subespaços vetoriais de $M_{3\times 3}$?

    $(a)\ W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \end{pmatrix}; d = a+b+c \right\}$; $\qquad (b)\ W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \end{pmatrix}; d < a+b+c \right\}$.

12. Sejam $u = (-1,2,1)$, $v = (1,2,0)$ e $w = (-2,-1,0)$. Expressar cada um dos vetores $v_1 = (-8,4,1)$, $v_2 = (0,2,3)$ e $v_3 = (0,0,0)$ como combinação linear de u, v e w.

13. Escreva E como combinação linear, se possível de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, onde

    $(i)\ E = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad (ii)\ E = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

    Que conjunto de $M_2(\mathbb{R})$ pode ser escrito como combinação linear de A, B e C?

14. Mostre que $(1,1,1)$, $(0,1,1)$, $(0,1,-1)$ geram o $\mathbb{R}^3$. O que isto significa?

15. Determine condições sobre a, b e c de modo que $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ pertença ao espaço gerado pelos vetores $u = (2,1,0)$, $v = (1,-1,2)$ e $w = (0,3,-4)$.

16. Para qual valor de k o vetor $u = (1,-2,k)$ em $\mathbb{R}^3$ será uma combinação linear dos vetores $v = (3,0,-2)$ e $w = (2,-1,-5)$?

17. Determine condições sobre a, b e c devem satisfazer para que o vetor $v = (a,b,c)$ seja combinação linear dos vetores $u = (1,-3,2)$ e $w = (2,-1,1)$.

18. Mostre que o plano yz, isto é, $W = \{(0,b,c); b,c \in \mathbb{R}\}$ em $\mathbb{R}^3$ é gerado por:

    (a) $(0,1,1)$ e $(0,2,-1)$;

    (b) $(0,1,2)$, $(0,2,3)$ e $(0,3,1)$;

    (c) Por que um plano pode ser gerado por dois ou três vetores? Este mesmo plano pode ser gerado por um vetor? Exiba um conjunto de quatro vetores que geram W e um conjunto de dois vetores que geram W.

19. Verifique se o vetor $u = (1,2,3)$ pertence ao subespaço de $I\!R^3$ gerado pelos vetores $v = (0,1,2)$ e $w = (1,0,1)$.

20. Verifique se o conjunto $C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$ gera o espaço vetorial $M_2(I\!R)$.

21. Mostre que os conjuntos $\{(1,-1,2),(3,0,1)\}$ e $\{(-1,-2,3),(3,3,-4)\}$ geram o mesmo subespaço vetorial de $I\!R^3$.

22. Determine um conjunto de geradores para cada um dos seguintes subespaços de $I\!R^3$.

    (a) $U = \{(x,y,z); x - 2y = 0\}$;

    (b) $V = \{(x,y,z); x + z = 0 \text{ e } x - 2y = 0\}$;

    (c) $U \cap V$.

23. Encontre um vetor em $I\!R^3$ que gere a interseção de V e W, onde V é o plano xy e W é o espaço gerado pelos vetores $(1,2,3)$ e $(1,-1,1)$.

24. Mostre que a interseção de subespaços é também um subespaço e verifique com um exemplo que a união de subespaços nem sempre é um subespaço.

25. Sejam W_1 e W_2 subespaços vetoriais de um espaço vetorial V. Mostre que $W_1 \cup W_2$ é subespaço vetorial de V se, e somente se, $W_1 \subset W_2$ ou $W_2 \subset W_1$.

26. Seja S subespaço vetorial de $I\!R^4$ dado por $S = \{(x,y,z,t) \in I\!R^4; x + 2y - z = 0 \text{ e } t = 0\}$. Pergunta-se:

    (a) $(-1,2,3,0) \in S$?

    (b) $(3,1,4,0) \in S$?

    (c) Determine dois vetores de geram S. Eles são únicos? Se não, apresente outros.

27. Determine $[S]$, onde $S = \{(1,-2,5,4),(2,3,1,-4),(3,8,-3,-5)\}$.

28. Verifique se o vetor $p(t) = t^3 - 2t$ pertence ao subespaço de $\mathbb{P}_3$ gerado por $\{t^3 - 1, t^2 + 1, t\}$.

29. Determine para que valores de k os vetores de $I\!R^3$ abaixo são L.I. ou L.D.

    (a) $u = (1,1,2)$, $v = (-1,2,3)$ e $w = (k,-1,1)$

    (b) $u = (-1,0,7)$, $v = (-4,5,-3k)$, $w = (0,4,-2)$ e $z = (2k,3,1)$

30. Suponha que $\{u,v,w\}$ é L.I. Então $\{u+v, u-v, u-2v+w\}$ é L.I. ou L.D.? Justifique.

31. Os conjuntos abaixo são linearmente independentes ou linearmente dependentes? Justifique (Faça contas somente quando for realmente necessário!)

    (a) $\{x^3 - 3x, 2x^2 + 4, 5x^3 - 7x^2 + 3, 4x^3 - 8, 6x\} \subset \mathbb{P}_3$;

    (b) $\{(-1,0,2,0,1),(0,1,0,-2,1),(-2,3,4,-6,5)\} \subset I\!R^5$;

(c) $\{(2,-1,3)\} \subset I\!R^3$;

(d) $\{(2,-1,0),(-1,3,0),(3,5,0)\} \subset I\!R^3$;

(e) $\{(2,1,3),(0,0,0),(1,5,2)\} \subset I\!R^3$.

32. Suponha que $S = \{v_1, v_2, ..., v_3\}$ seja L.I., mas $\{v_1, v_2, ..., v_n, w\}$ seja L.D. Mostre que w é combinação linear dos vetores de S.

33. Sejam $v_1, v_2, ..., v_n$ vetores L.I. de um espaço vetorial V e suponha que u é uma combinação linear desses vetores, digamos $u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n$. Mostre que a representação de u acima é única. Dê um exemplo em $I\!R^3$ mostrando que se o conjunto de vetores for L.D. Então a representação não será única.

34. Prove que o subconjunto $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ de vetores de um espaço vetorial V é L.D. se, e somente se, existe k inteiro, $1 \leq k \leq n$ tal que v_k é combinação linear dos demais vetores do subconjunto S.

35. Mostre que:

(a) Se u, v, w são L.I. então $u+v, u+w, v+w$ são L.I.

(b) Se um conjunto $A \subset V$ contém o vetor nulo, então A é L.D.

(c) Se uma parte de um conjunto $A \subset V$ é L.D. então A é L.D.

(d) Se um conjunto $A \subset V$ é L.I., qualquer subconjunto de A é L.I.

36. Consideremos no espaço vetorial $I\!R^2$ os vetores $u = (1-a, 1+a)$ e $v = (1+a, 1-a)$, onde $a \neq 0$. Mostre que $\{u, v\}$ é L.I.

37. Mostre que $\{(1,0,a),(1,1,a),(1,1,a^2)\} \subset I\!R^3$ é L.I. se $a \neq 0$ e $a \neq 1$.

38. Se u, v e w são vetores de um espaço vetorial V tais que $u \in [w]$ e $v \in [w]$, mostrar que $\{u, v\}$ é L.D.

39. Determine uma base e a dimensão do subespaço de $M_4(I\!R)$ formado por todas as matrizes diagonais.

40. Determine uma base e dimensão dos subespaços vetoriais:

(a) $W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{pmatrix}; a, b, c \in I\!R \right\} \subset M_{2\times 3}$.

(b) $W_2 = \{(x,y) \in I\!R^2; 2x - 2y = 0\}$;

(c) $W_3 = [(1,2,3),(0,0,2),(-2,-4,-2)]$;

(d) $W_4 = \{(x,y,z,t) \in I\!R^4; 2x - 2y = 0 \text{ e } t + x = z\}$.

41. Sendo $v_1 = (1,2) \in I\!R^2$, determinar $v_2 \in I\!R^2$ tal que $\{v_1, v_2\}$ seja base de $I\!R^2$.

42. Quais dos seguintes conjuntos formam uma base de $I\!R^3$? Nos que formarem, escrever um vetor genérico de $I\!R^3$ como combinação linear dos elementos desse conjunto.

(a) $\{(1,0,1),(0,-1,2),(-2,1,-4)\}$;

(b) $\{(2,1,-1),(-1,0,1),(0,0,1)\}$;

(c) $\{(2,3,-1),(-2,1,1),(2,0,1)\}$

43. Mostre que $\left\{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}\right\}$ é uma base de $M_2(\mathbb{R})$.

44. Mostre que os vetores $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (1,2,3)$, $v_3 = (3,0,2)$ e $v_4 = (2,-1,1)$ geram o $\mathbb{R}^3$ e encontrar uma base dentre esses vetores.

45. Determinar as coordenadas do vetor $v = (6,2)$ em relação às bases:

    (a) $\{(3,0),(0,2)\}$;

    (b) $\{(1,2),(2,1)\}$;

    (c) $\{(1,0),(0,1)\}$

46. Considere $B = \{(1,0,0),(0,1,0),(1,-1,1)\}$ base de $\mathbb{R}^3$. Determinar as coordenadas do vetor v em relação a B se:

    (a) $v = (2,-3,4)$;

    (b) $v = (3,5,6)$;

    (c) $v = (1,-2,1)$.

47. Determine uma base de $\mathbb{R}^4$ que contenha os seguintes vetores $(1,1,1,0)$, $(1,1,2,1)$.

48. Determine a dimensão e uma base para cada um dos seguintes subespaços vetoriais de $M_2(\mathbb{R})$:

    (a) $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; c = a - 3b \text{ e } d = 0\right\}$;

    (b) $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; a + d = b + c\right\}$.

49. Seja W o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores $(1,-2,5,-3)$, $(2,3,1,-4)$, $(3,8,-3,-5)$.

    (i) Encontre uma base e a dimensão de W;

    (ii) Estenda a base de W a uma base do espaço $\mathbb{R}^4$;

    (iii) Faça agora o caminho inverso, encontre os vetores da base canônica de $\mathbb{R}^4$ que geram W.

50. Encontrar uma base e a dimensão do espaço solução do sistema linear homogêneo

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 4x & + & 3y & - & z & + & 5t & = & 0 \\ 2x & - & y & + & z & - & t & = & 0 \\ 6x & + & 2y & & & + & 4t & = & 0 \end{array}\right. .$$

51. Sejam U, V subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$. Determine uma base e a dimensão dos subespaços $U, V, U+V$ e $U \cap V$.

(a) $U = \{(x, y, x); x = 0\}$, $\quad V = \{(x, y, z); y - 2z = 0\}$.

(b) $U = \{(x, y, z); x + y = 0 \text{ e } 4x - z = 0\}$, $\quad V = [(1, -1, 2), (2, 1, 1)]$.

52. Sejam U e W subespaços vetoriais de $I\!R^4$ gerados por $R = \{(1, 1, 0, -1), (1, 2, 3, 0), (2, 3, 3, -1)\}$ e $S = \{(1, 2, 2, -2), (2, 3, 2, -3), (1, 3, 4, -3)\}$ respectivamente.

    (a) Determine uma base para os espaços U e W.

    (b) Determine $dimU$, $dimW$, $dim(U \cap W)$ e $dim(U + W)$.

53. Sejam U e W subespaços de $\mathbb{P}_3(I\!R)$ dados por $U = \{at^3 + bt^2 + ct + d; a = b - c\}$ e $W = \{at^3 + bt^2 + ct + d; d = a + b + c\}$

    (a) Determine uma base para os espaços U e W.

    (b) Determine $dimU$, $dimW$, $dim(U \cap W)$ e $dim(U + W)$.

54. Quais as coordenadas do vetor $v = (1, 0, 0)$ em relação à base $\beta = \{(1, 1, 1), (-1, 1, 0), (1, 0, -1)\}$.

55. Determine as coordenadas do vetor $u = (4, 5, 3)$ de $I\!R^3$ em relação às seguintes bases:

    (a) Canônica;

    (b) $\{(1, 1, 1), (1, 2, 0), (3, 1, 0)\}$;

    (c) $\{(1, 2, 1), (0, 3, 2), (1, 1, 4)\}$.

56. Quais as coordenadas do vetor $p(t) = t^3 - 2t^2 + 1$ em relação à base $\beta = \{t^3 + 1, t^2 - 1, t, 2\}$.

57. Considere a base ordenada $\gamma = \{v_1, v_2, v_3\}$ do $I\!R^3$ onde

$$v_1 = (1, 0, -1), \quad v_2 = (1, 1, 1), \quad v_3 = (1, 0, 0).$$

    Encontre as coordenadas do vetor $u = (a, b, c) \in I\!R^3$ com relação à base ordenada γ.

58. Considere o espaço vetorial real $I\!R^2$. A matriz da mudança da base ordenada $\gamma = \{(1, 1), (-2, 2)\}$, para a base ordenada $\alpha = \{v_1, v_2\}$ é dada por

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}.$$

    Detremine a base ordenada α. Determine o elemento $u \in I\!R^2$ tal que $[u]_\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

59. Considere as bases $\beta = \{u_1, u_2, u_3\}$ e $\gamma = \{w_1, w_2, w_3\}$ de $I\!R^3$, relacionadas da seguinte forma:

$$\begin{cases} w_1 = u_1 - u_2 - u_3 \\ w_2 = 2u_2 + 3u_3 \\ w_3 = 3u_1 + u_3 \end{cases}.$$

    Pede-se:

    (a) Determine as matrizes de mudança de base $[I]^\beta_\gamma$ e $[I]^\gamma_\beta$.

(b) Sabendo que

$$[u]_\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

determine o vetor u com relação à base γ.

60. Considere a seguinte matriz de mudança de base

$$[I]^{\beta}_{\beta'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Encontre:

(a) $[v]_\beta$, onde $[v]_{\beta'} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

(b) $[v]_{\beta'}$, onde $[v]_\beta = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.