UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Quarta lista de Exercícios de Introdução à Álgebra Linear - MTM112
Professor: Vinícius V. P. de Almeida

1. Sejam $V = \mathbb{R}^2$, $u = (a, b)$ e $v = (x, y)$ dois vetores quaisquer de $\mathbb{R}^2$. Verifique se a fórmula dada por $\langle u,\, v\rangle = \langle (a, b),\, (x, y)\rangle \,=\, ax - bx - ay + 4xy$ é um produto interno em $\mathbb{R}^2$.

2. Sejam $V = \mathbb{R}^3$, $u = (a, b, c)$ e $v = (x, y, z)$ dois vetores quaisquer de $\mathbb{R}^3$. Verifique se a fórmula dada por $\langle u,\, v\rangle \,=\, \langle (a, b, c),\, (x, y, z)\rangle \,=\, 2ax + by + 4cz$ é um produto interno em $\mathbb{R}^3$.

3. Sejam $V = \mathbb{R}^3$, $u = (a, b, c)$ e $v = (x, y, z)$ dois vetores quaisquer de $\mathbb{R}^3$. Verifique se a fórmula dada por $\langle u,\, v\rangle \,=\, \langle (a, b, c),\, (x, y, z)\rangle \,=\, ax + 5by + 2cz$ é um produto interno em $\mathbb{R}^3$.

4. Sejam $V = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, $p(t)$, $q(t) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ dois polinômios quaisquer de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

   $a)$ Verifique que a fórmula dada por $\langle (p(t),\, q(t)\rangle \,=\, \displaystyle\int_{-1}^{1} p(t)q(t)\, dt$, é um produto interno em $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

   $b)$ Verifique se $p_1(t) = t$ e $p_2(t) = t^2 + 1$ são ortogonais (em relação ao produto definido no item (a)).

5. Sejam $V = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, $p(t)$, $q(t) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ dois polinômios quaisquer de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. Considere o produto interno dado no exercício anterior $\langle (p(t),\, q(t)\rangle \,=\, \displaystyle\int_{-1}^{1} p(t)q(t)\, dt$. Seja W o subespaço vetorial de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ gerado por $p_1(t) = 1$ e $p_2(t) = 1 - t$. Determine uma base ortogonal para W.

6. Determine uma base ortogonal (em relação ao produto escalar) para o subespaço W de $\mathbb{R}^3$, onde $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x - y + z = 0\}$.

7. Se v é o vetor que satisfaz as condições:
   (i) v é ortogonal aos vetores $u = (1, 0, 2)$ e $w = (-2, 1, 0)$,
   (ii) $\|v\| = \sqrt{21}$,
   (iii) o ângulo entre v e o vetor $(0, 1, 2)$ é menor que $\pi/2$.

   Encontre o ponto final do representante de v que tem como ponto inicial em $(0, 0, 0)$.

8. Sejam $V = M_2(\mathbb{R})$, as matrizes quadradas de ordem 2 reais e o produto dado pela expressão $\left\langle \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \right\rangle = ax + 2by + 3cz + dt.$

   $a)$ Verifique que o produto acima é um produto interno.

   $b)$ Calcule o ângulo entre as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

   $c)$ Calcule x de modo que o ângulo entre $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & x \end{pmatrix}$ seja $\theta = \pi/2$.

9. Sendo $u = (3, 0, 2)$ e $v = (3, 4, 7)$, encontre $proj._v^u$.

10. Considere o conjunto $B = \{\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}\}$, sendo $\overrightarrow{w_1} = (1, 0, -2)$ e $\overrightarrow{w_2} = (1, 1, 1)$. Verifique se B é um conjunto ortonormal. Caso não seja, encontre a partir de B um conjunto $\widetilde{B}$ que seja ortonormal.

11. Seja $\beta = \{(2, 1, 0), (1, -2, 0), (0, 0, 3)\}$. Verifique se β é uma **base ortogonal** para o $\mathbb{R}^3$. Em caso afirmativo, **usando o produto interno canônico do $\mathbb{R}^3$ (produto escalar)**, encontre $[(5, 5, 5)]_\beta$.

12. Seja $\beta = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 2, 2)\}$. Encontre, a partir de β uma base ortonormal β' de $\mathbb{R}^3$, em relação ao produto interno usual.

13. Um corpo é deslocado em linha reta do ponto $P = (-1, 3)$ até o ponto $Q = (5, 2)$ por uma força constante $F = (3, 2)$. Qual é o trabalho realizado?

14. Um campo elétrico uniforme induz uma força constante dada pelo vetor $F = (10, 2, -5)$ em uma partícula carregada eletricamente. Sejam $A = (1, 1, 3)$, $B = (2, 3, 2)$, $C = (2, 2, 1)$, pontos de $\mathbb{R}^3$ e T_{AB}, T_{BC}, T_{CA} o trabalho realizado de A a B, de B a C e de C a A, respectivamente. Sabendo que o trabalho total é dado por $T = T_{AB} + T_{BC} + T_{CA}$ e que trabalho é o produto interno da força pelo vetor que dá o deslocamento, encontre o trabalho total realizado quando uma partícula se move na trajetória que começa e termina no ponto A.

15. Um corpo é deslocado em linha reta do ponto $P = (-1, 3)$ até o ponto $Q = (5, 2)$ por uma força constante $F = (3, 2)$. Qual é o trabalho realizado?

16. Classifique as afirmações em verdadeiro ou falso, justificando a sua resposta:

    a) Se u e v são dois vetores tais que $\|u\| = \|v\| = \|u + v\| = 1$, então o ângulo entre u e v é $\pi/6$.

    b) Se u e v são dois vetores tais que $\|u\| = \|v\| = 1$ e $\|u - v\| = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$, então o ângulo entre u e v é $\pi/6$.

    c) Para todos vetores v e w vale $\langle v, w\rangle = \dfrac{1}{4}(\|v + w\|^2 - \|v - w\|^2)$.

    d) Se u, v e w são vetores que satisfazem a $u + v + w = 0$; $\|u\| = 2$; $\|v\| = 3$ e $\|w\| = \sqrt{5}$, então $\langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle = 9$.

    e) O conjunto de vetores $B = \left\{ \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, 2\right), \left(\dfrac{2}{9}, \dfrac{2}{9}, \dfrac{-1}{9}\right) \right\}$ é um conjunto ortonormal.

    f) Se u, v são vetores quaisquer, então $(\|u\| + \|v\|)^2 \geq \|u + v\|^2$.

    g) Se u, v são vetores quaisquer, então $|\langle u, v\rangle|^2 \leq \|u\|^2\|v\|^2$.